目　　录

§1. 紧曲面的分类和一般性质

我们称连通的二维流形为曲面，它是球面、环面、柱面等熟知概念的推广。曲面M称为闭的，如果M是紧的且无边界。也就是说，闭曲面是一个连通紧 Hausdorff 空间，其中每一点有一邻域同胚于 Euclid 平面。本节主要介绍闭曲面的一些熟知的基本性质，以便将来可以应用。由于这些结果都是古典的，所以略去证明。有兴趣的读者可以参阅文献[1]，[2]，[3]，[4]，[5]，[6] 中的有关章节。

定理 1. 设闭曲面或带边界的紧曲面M被三角剖分而成为复形时，其顶点数为 α_0，边数为 α_1，二维胞腔数为 α_2。以 R_p^0, R_p^1, R_p^2 分别表示此复形的零维，一维，二维的模 p (p 为素数或零) Betti 数。则有

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = R_p^0 - R_p^1 + R_p^2. \tag{1}$$

等式(1)称为M的 Euler-Poincaré 关系式。记其值为 $\chi(M)$，称为M的 Euler 特征。

记：

$$\left.\begin{aligned} &T_0 = \text{球面 } S^2,\\ &T_1 = \text{环面 } T^2,\\ &T_2 = T_1 \# T_1,\ \text{称为 } T_1 \text{ 与 } T_1 \text{ 的连通和}^{1)},\\ &\cdots\\ &T_g = T_{g-1} \# T_1,\ \text{当 } g \geqslant 2 \text{ 为正整数时}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

它们被称为可定向闭曲面的模式。易见 T_1 也可视为带有一个柄

---

1) 两个曲面 M_1 与 M_2 的连通和是指：从每一曲面上各挖去一个开圆盘 D_1^2 与 D_2^2，然后把 M_1 与 M_2 沿着 D_1^2 与 D_2^2 的边界粘合而得的曲面，记为 $M_1 \# M_2$。严格定义见[3]或[4]。

的球面[1]. 一般地, T_g 可视为带有 g 个柄的球面. 因此,图 1.1 中的两种模式是一样的.

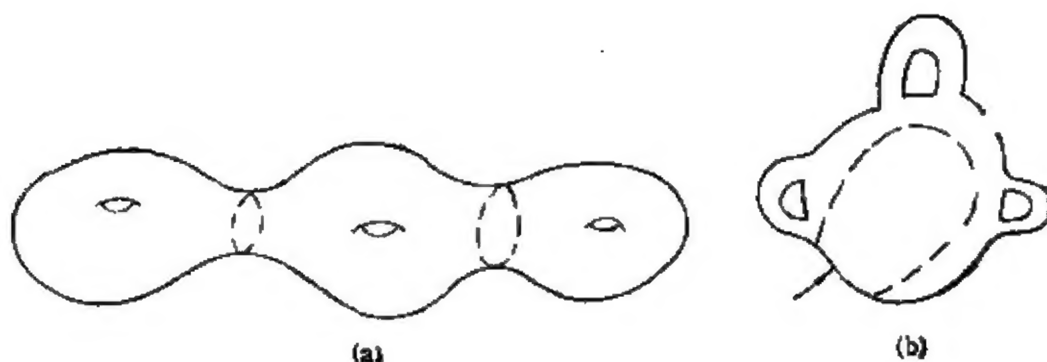


图 1.1

再记:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \text{射影平面 } PR^2, \\ P_2 = P_1 \# P_1 = \text{Klein 瓶 } K^2, \\ \cdots \\ P_g = P_{g-1} \# P_1, \text{ 当 } g \geqslant 2 \text{ 时.} \end{array}\right\} \tag{3}$$

它们被称为不可定向闭曲面的模式[2].

最简单的带边可定向紧曲面是闭圆盘 $\overline{D}^2$. 最简单的带边不可定向紧曲面是 Möbius 带 B_2. 熟知的是 $\overline{D}^2$, B_2, S^2, H_2, T^2, PR^2, K^2 有如下的表示图(图 1.2), 其中凡加箭头的实线对边都应沿箭头的正向叠合, 边界旁画着的虚箭头表示边界的某一正方向.

此外,还有下列一些等式成立:

$$\overline{D}_1^2 \cup D_2^2 = S_1^2 \# S_2^2 = S^2, \tag{4}$$

---

1) 即从 S^2 上挖去两个开圆盘 D_1^2 与 D_2^2 (剩下来的实际上是一带边柱面 H_2),然后把另一带边柱面(柄)的两端与 $S^2 - D_1^2 - D_2^2$ 沿着两个圆盘的边界粘合. 给曲面 M 加柄实际上是作 M 与 S^2 的双重连通和, 即从每一曲面上各挖去两个圆盘以后再彼此粘合. 今后记之为 $M \#_2 S^2$, 或记为 $M \#_2^* H_2$, 这里 * 表示作连通和时 M 被挖去一个开圆盘,而 H_2 本身带边,未被挖去什么,又 # 的右下角的 2 表示 M 被挖去的开圆盘个数.

2) P_g 可以看成是带有 g 个交叉帽的球面,见图 10.16.

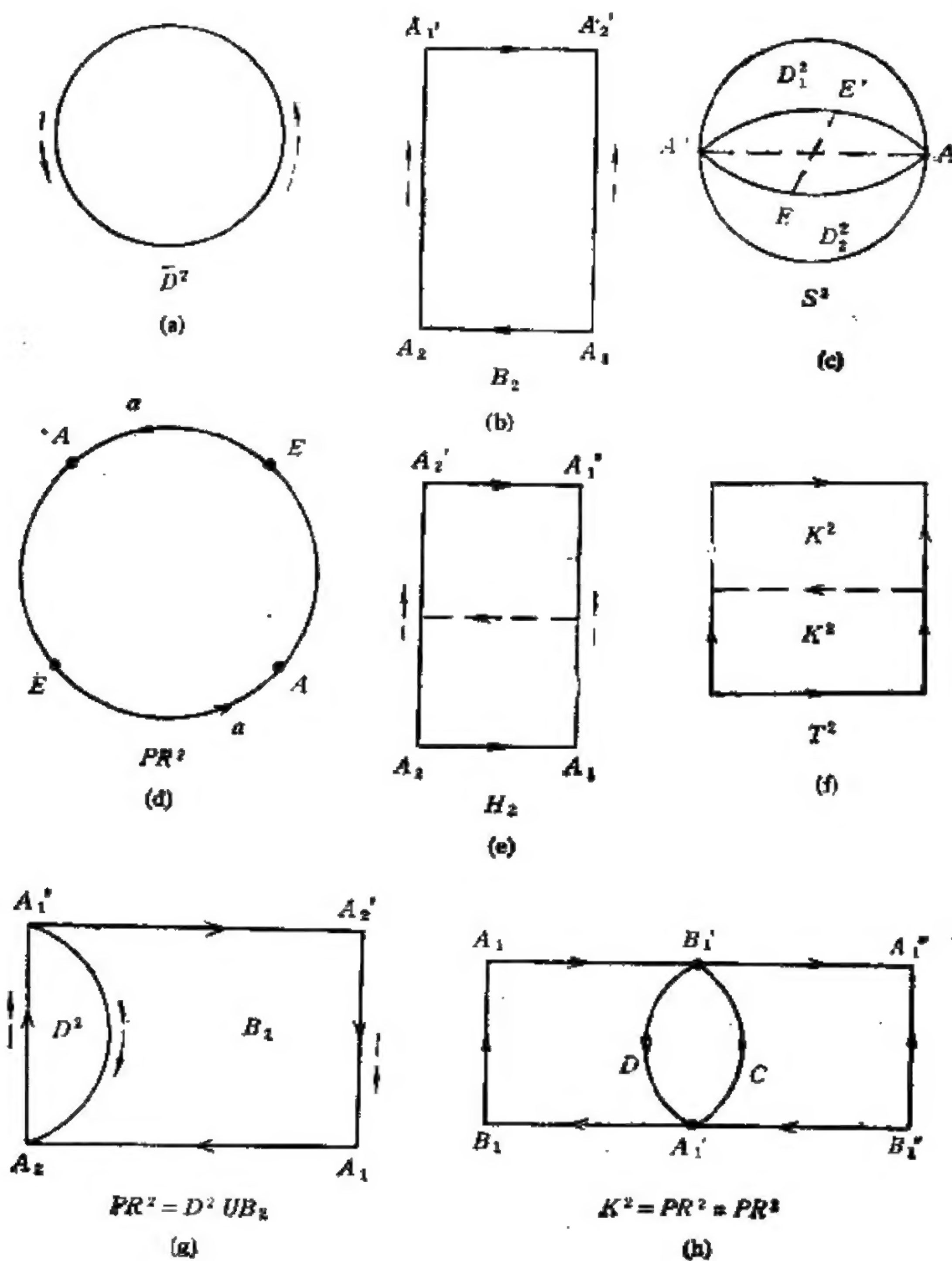


图 1.2

$$D^2 \cup B_2 = S^2 \# {}^*B_2 = S^2 \# PR^2 = PR^2. \qquad (5)^{1)}$$

1）若记 $P_0 = S^2$，则此式亦可改写为 $P_0 \# P_1 = P_1$. 两式都是定理 3 后面的 $M \# S^2 = M$ 的特例。

注意图 1.2 中的 (c),(d), 可知 S^2 是 PR^2 的二重覆盖空间; 注意其中的 (f), 可知 T^2 是 K^2 的二重覆盖. 此外, 又易见: 实直线 $\mathring{H}_2$ (不带边的圆柱)和 R^2 分别是圆 S^1,T^2 和 $\mathring{H}_2$的可数无限重覆盖空间. 一般可证:

定理 2. 每一流形M必有一可定向的两重覆盖流形 $\widetilde{M}$(见[4] p. 106).

由定理 1 及 S^2 与 PR^2 的三角剖分,易见:

$$\chi(S^2) = 2, \chi(PR^2) = 1. \tag{6}$$

又由连通和#的定义和定理 1,易见对曲面 M,N,

$$\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2. \tag{7}$$

然后应用归纳法,易证:

定理 3. T_g 与 P_g 的 Euler 特征分别为:

$$\chi(T_g) = 2 - 2g, \chi(P_g) = 2 - g. \tag{8}$$

注意: $\#, \#_2, \#^*$ 与 $\#_2^*$ 的定义以及(7),(8)两式,可知下面一些性质成立.

性质 1. 对任何曲面M有

$$M \# S^2 = M. \tag{9}$$

性质 2. 给 T_g 加柄时有

$$T_g \#_2 S^2 = T_g \#_2^* H_2 = T_g \# T_1 = T_{g+1}, \tag{10}$$

$$\chi(T_{g+1}) = \chi(T_g) - 2. \tag{11}$$

性质 3. 给 P_g 加横截帽 (cross cap, 其意义见下式的第一项)时有(参考(5)式)

$$P_g \#^* B_2 = P_g \# PR^2 = P_{g+1}, \tag{12}$$

$$\chi(P_{g+1}) = \chi(P_g) - 1. \tag{13}$$

性质 4. 给 P_g 加柄等于给 P_g 加两个横截帽:

$$P_g \#_2^* H_2 = P_g \#_2 S^2 = P_{g+2} \quad (g \geqslant 1). \tag{14}$$

此式的证明见[4],亦可将(7)式推广到 $\#_2$ 再证明[1].

性质 5. 给 T_g 加横截帽后得到 P_{2g+1}:

---

1) 即利用 $\chi(M \#_2 N) = \chi(M) + \chi(N) - 4$ 来证(14)式左边的 Euler 特征为 $-g$. 性质 5 亦可用同法证明,但都要用到后面的定理.

$$T_g \# {}^* B_2 = T_g \# PR^2 = PR^2 \# T_g = PR^2 \# {}^* \sum_1^{2g} B_2$$

$$= PR^2 \# \sum_1^{2g} PR^2 = P_{2g+1}, \tag{15}$$

$$\chi(P_{2g+1}) = \chi(T_g) - 1.$$

定理 4（可定向曲面的分类）．设M为可定向闭曲面，则必存在唯一的非负整数 $g \geqslant 0$，使M同胚于 T_g．若M为可定向带边曲面，∂M 有 b 个连通支，M的 Euler 特征为 χ，则 $\chi + b$ 为偶数．记 $g = 1 - \dfrac{\chi + b}{2}$，则$M$ 同胚于 T_g 上挖去 b 个互不相遇的开圆盘而得到的可定向曲面（见[4]）．

定理 5. 亏格为 g 的可定向曲面M上必存在 g 个互不相遇的圆，使它们的和集在M上的余集仍为连通集；但M上任何 $g+1$ 个互不相遇的圆必定将M分割为不连通集．

定理 5′. 若N为不可定向闭曲面，则必存在一正整数 g，使N包含 g 个，但不包含 $g+1$ 个互不相遇的 Möbius 带．g 称为N的 Möbius 数．

由(5)及(12)式知 P_g 上至少包含 g 个 Möbius 带．

定理 4′（不可定向曲面的分类）．若N为不可定向闭曲面，其 Möbius 数为 g，则N必同胚于 P_g．从N上除去一切 Möbius 带而代之以圆盘，则所得为球面．若N为不可定向带边曲面，其 Möbius 数为 g，∂N 有 b 个连通支，则N同胚于 P_g 上挖去 b 个互不相遇的开圆盘．

系 1. P_g 上恰有 g 个 Möbius 带．

注意：闭曲面M若挖去 b 个开圆盘而成为带边（边界为 b 个连通支）紧曲面时，则其亏格不变，而 Euler 特征 χ 则减少 b．故由定理 3,4,4′ 可得：

定理 6. 若带边紧曲面M有亏格 g，∂M 有 b 个连通支，每一个都是拓扑圆，则

$$\chi(M) = 2 - 2g - b, \text{当} M \text{为可定向时}, \tag{16}$$

$$\chi(M)=2-g-b,\ \text{当}M\text{为不可定向时.}$$

系 2. 若闭曲面的 Euler 特征为奇数，则它必为不可定向。

定理 7. 两个紧曲面互相微分同胚当且仅当它们有相同的亏格，Euler 特征，以及相同个数的边界连通支。

系 3. 对定理 2 中的M与 $\widetilde{M}$，若M的亏格为 g，则 $\widetilde{M}$ 的亏格为 $g-1$（因为 $\chi_{\widetilde{M}}=2\chi_M$）。

系 4. 若曲面M与N同为可定向或同为不可定向，则

$$g(M\#N)=g(M)+g(N). \qquad (17)$$

若M为可定向而N为不可定向，则

$$g(M\#N)=2g(M)+g(N). \qquad (18)$$

定理 8. 对亏格为 g 的可定向闭曲面有：

$$R_p^0=1,R_p^1=2g,R_p^2=1,\chi=2-2g\quad(p\ \text{为素数}). \qquad (19)$$

对亏格为 g 的不可定向闭曲面有：

$$\left.\begin{array}{l}R_2^0=1,R_2^1=g,R_2^2=1;\\ R_p^0=1,R_p^1=g-1,R_p^2=0\ (p\neq 2),\end{array}\right\}\ \chi=2-g. \qquad (20)$$

对于常见的亏格 $\leqslant 2$ 的各种曲面、单形与球，可列表如下：

流形	各维 Betti 数	边界连通支数	亏格	Euler 特征
H_2	$R_p^0=1,R_p^1=1,R_p^2=0$	$b=2$	$g=0$	$\chi=0$
T^2	$R_p^0=1,R_p^1=2,R_p^2=1$	$b=0$	$g=1$	$\chi=0$
B_2	$R_p^0=1,R_p^1=1,R_p^2=0$	$b=1$	$g=1$	$\chi=0$
K^2	$R_p^0=1,R_p^1=1,R_p^2=0(p\neq 2)$ $R_2^0=1,R_2^1=2,R_2^2=1$	$b=0$	$g=2$	$\chi=0$
PR^2	$R_p^0=1,R_p^1=0,R_p^2=0(p\neq 2)$ $R_2^0=1,R_2^1=1,R_2^2=1$	$b=0$	$g=1$	$\chi=1$
$n(\geqslant 0)$ 维胞腔 $\bar{D}^n$	$R_p^0=1,\ R_p^i=0(0<i\leqslant n)$	$b=1$	$g=0$ (对 $n=2$)	$\chi=1$
$n(>0)$ 维球 S^n	$R_p^0=1,R_p^i=0(0<i<n)$ $R_p^n=1$	$b=0$	$\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$ (对 $n=2$)	$\chi=1+(-1)^n$

定理 9. T_g 与 B_2 可嵌入 R^3，PR^2 与 K^2 则不能。一般，一个无边、紧、不可定向 n 维流形不能嵌入一单连通的 $n+1$ 维流形(见[4])。但对任何 $P_g, g \geqslant 1$，总存在 R^4 中的可微曲面同胚于 P_g（见 [6]）。

定理 10. 亏格为 g 的可定向闭曲面的标准记法为(见[1])：

$$\begin{aligned} &aa^{-1} = 1 \quad (g = 0,\text{ 球面}), \\ &a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = 1 \quad (g \geqslant 1). \end{aligned} \tag{21}$$

亏格为 g 的不可定向闭曲面的标准记法为

$$a_1a_1\cdots a_ga_g = 1, \tag{22}$$

或

$$\begin{aligned} &a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_{g-1}^{-1}b_{g-1}^{-1}a_ga_g = 1 \text{（当 } \chi \text{ 为奇数时）}, \\ &a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g = 1 \quad \text{（当 } \chi \text{ 为偶数时）}. \end{aligned} \tag{23}$$

例 1. 对 PR^2 有 $a_1a_1 = 1$，对 T^2 有 $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} = 1$，对 K^2 有 $a_1b_1a_1^{-1}b_1 = 1$，这可由图 1.2(d),(f),(h) 容易地看出。

定理 11. 若M为连通复形，则其一维同调群 $H_1(M)$ 同构于商群 $\pi_1(|M|)/F$，其中 $\pi_1(|M|)$为$|M|$的基本群，F 为 $\pi_1(|M|)$ 的换位子群。特别地，当 $\pi_1(|M|)$ 为交换群时，$\pi_1(|M|)$ 与 $H_1(M)$ 同构。

例 2. $\pi_1(T^2) \approx H_1(T^2)$ 为交换群，而 $\pi_1(K^2)$ 则为非交换群，故不同构于 $H_1(K^2)$。一般地，$T_g(g \geqslant 2)$ 的基本群都不是交换群。

再仔细研究一下 K^2 的基本群。以

$$h: (x, y) \longmapsto (x + 1, y) \tag{24}$$

记 R^2 中的平移，以

$$k: (x, y) \longmapsto (-x, y + 1) \tag{25}$$

记 R^2 中的平移加对称。由 h 与 k 所产生的群G不是交换群，因为由定义易证

$$hk = kh^{-1}. \tag{26}$$

此式亦可由图 1.3 看出。实际上，(26)就是例 1 中的 $a_1b_1a_1^{-1}b_1 = 1$。因为由(26)可得 $kh^{-1}k^{-1}h^{-1} = 1$，再令 $h^{-1} = j$，即得 $kjk^{-1}j = 1$。

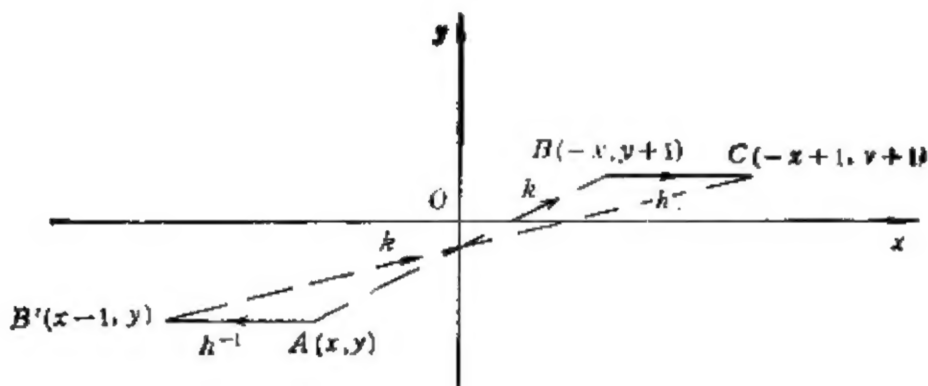


图 1.3

对 K^2 来说，$\pi_1(K^2)$ 的换位子群 F 由 h^2 所产生，因为

$$hkh^{-1}k^{-1} = hhkk^{-1} = h^2.$$

由于 K^2 的基本群为 G，故 K^2 同胚于商群 R^2/G，而

$$\pi_1(K^2) = G \approx Z \oplus Z_2. \qquad (27)$$

关于 H_2, T^2 与 K^2 的基本群有如下三个重要的定理，以下都用 J 表示 Jordan 曲线。

定理 12. 设 J 位于开柱面 $R^2 - \{0\} = \mathring{H}_2$ 上。若 J 的内部包含 R^2 的原点 O，则 J 表示 $\mathring{H}_2$ 的基本群的产生元；否则，J 在 $\mathring{H}_2$ 中同伦于零。$\pi_1(\mathring{H}_2) \cong Z$。

定理 13. 设 J 在 T^2 上不同伦于零，则 J 在基本群 $\pi_1(T^2)$ 中所属的同伦类 i 可由一对互素整数 (m, n) 来表示。易见

$$\pi_1(T^2) \cong \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \cong Z \oplus Z. \qquad (28)$$

定理 14. 设 J 在 K^2 上不同伦于零，则 J 必表示 $\pi_1(K^2)$ 中的下列元素之一：

$$h, h^{-1}, k^2, k^{-2}, kh^n, k^{-1}h^n \qquad (n \in Z).$$

下面是上述一些元素的图示法，易见图 1.4 中 k^2h 不是单闭曲线，又每一元素的图示并不唯一。

推广(27)与(28)有：

定理 15. T_g 与 P_g 的基本群为

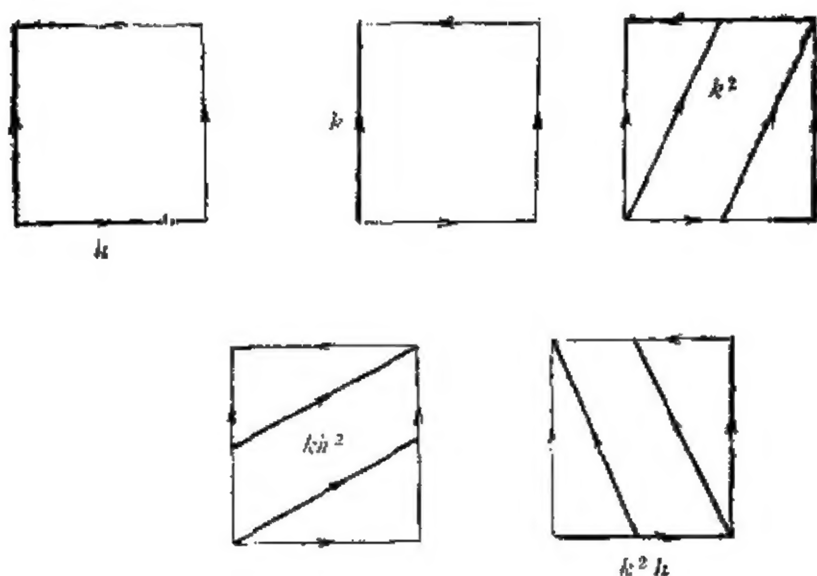


图 1.4

$$\pi_1(T_g) \approx Z\oplus Z\oplus\cdots\oplus Z \qquad (2g\ 个),$$
$$\pi_1(P_g) \approx \underbrace{Z\oplus Z\oplus\cdots\oplus Z}_{g-1\ 个}\oplus Z_2.$$

定义 1. 曲面M上的 Jordan 曲线J称为是双边的，如果J在M上有一开邻域同胚于 $\mathring{H}_2$。J称为是单边的，如果J在M上有一开邻域同胚于 $\mathring{B}_1$。

易见：若J在K^2上所属的同伦类为$h^{\pm 1}, k^{\pm 2}$，则J是双边的；否则，J是单边的(由定理 14)。注意：曲面上一单边 Jordan 曲线的补集必为连通集；但反之，补集为连通集的 Jordan 曲线却可能是双边的。在 S^2, H_2 与 T^2 上，一 Jordan 曲线的补集是否为连通，比较容易看。在 K^2 上则否，且情况比较复杂。设J代表 $\pi_1(K^2)$ 的元素 j，则有下列四种不同的情况：

1) 当 $j=1$(即J同伦于零)时，K^2-J 有两个连通支，其一同胚于 D^2。

2) 当 $j=h^{\pm 1}$ 时 K^2-J 同胚于 $\mathring{H}_2$，即只有一个连通支。

3) 当 $j=k^{\pm 2}$ 时 K^2-J 有两个连通支，各同胚于 $\mathring{B}_2$(图 1.5(a))。

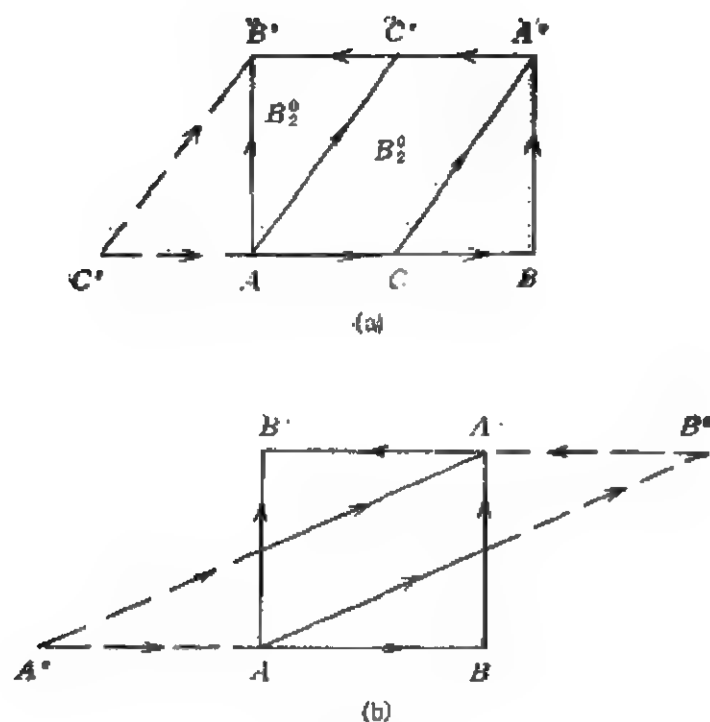


图 1.5

4) 当 $j = k^{\pm 1}h^n$ 时，$K^2 - J$ 同胚于 B_2^1(图 1.5(b))。

定理 16. 设 $\widetilde{M}$ 为不可定向闭曲面M的可定向二重覆盖。J 是M上一单闭曲线。J_1 与 J_2 是 J 在 $\widetilde{M}$ 中的逆象（称为 J 在 $\widetilde{M}$ 中的提升），则当 J 为双边曲线时，J_1 与 J_2 各为单闭曲线；当 J 为单边曲线时，J_1 与 J_2 都不是闭曲线，但 $J_1 \cup J_2$ 是 $\widetilde{M}$ 中的单闭曲线。

对于非紧曲面，也有类似于本节的分类定理，见[7]；这时亏格和边界连通支的个数都可以是无限的。

§2. 微分流形上动力系统的一般性质

本节的内容仍是古典的、熟知的，读者除[3]，[5]以外还可参阅[8]，[9]，[10]，证明从略。

设M为一微分流形，TM 是M的切丛。M上的一个向量场X就是一映射 $X: M \to TM$，使得对每一点 $x \in M$ 有 $X(x) \in T_xM$. 这里 T_xM 表示M在 x 的切空间，$X(x)$ 表示M在 x 的切向量. 当 $X(x)$ 不为零向量时称 x 为 X 的常点；否则，称 x 为 X 的奇点。即使M的维数为 2，TM 的维数也是 4，故我们无法把 TM 嵌入到 R^3 中去。这一点就直观上看是很明显的。R^3 中一曲面 S 在其上任二点的切平面必交于一直线（如果这两点处于曲面上的一般位置），这是和 TM 的定义相违背的。尽管如此，若在闭曲面 S 上给定一个向量场 X，由于点 x 的切向量（包括零向量）可以用一由 x 出发的有向线段（包括一点）来表示，则X仍可在 R^3 中描绘出来。当映射X为可微时称X为M上的可微向量场。

定义 1. M上可微向量场X的一条积分线 γ 是一个 C^1 类映射 $\gamma: I \to M$，使得对一切 $t \in I$ 都有

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \tag{1}$$

这里 I 表示实轴上一非零区间，$X(\gamma(t))$ 表示位于M上 $\gamma(t)$ 这一点的切空间 $T_{\gamma(t)}M$ 中的场X的向量。

特别地，若 x 为X的零点，则可定义一映射 γ，使 $\gamma(I) = x$，这时 $\gamma'(t) = 0$。由此可见，奇点是向量场的特殊积分线。

如同欧氏空间中定常方程所确定的向量场一样，易证：若 $\gamma(t)$ 是X的积分线，则 $\gamma(-t)$ 和 $\gamma(t+\tau)$（τ 固定）也都是X的积分线。

由于微分流形本身一般只有局部坐标系，因而流形上的向量场X也只能有局部的坐标表示．设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为n维流形M_n在其上一开邻域U中的局部坐标，则X可在U中用一算子

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \cdots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2}$$

来表示，而它的积分线则是自治方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \cdots, x_n) \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{3}$$

的轨线，其中诸f_i至少为一次可微．于是X在M_n上的积分线的存在性、唯一性和可延展性等等都可借助于M_n上的地图集和R^n中的微分方程理论而得到．特别地，若M为仿紧流形（紧流形是其特例），则由仿紧性和微分方程论知道总可作适当的时间变换，使得沿着X的每一积分线向两个方向延展时，t的变动范围为$(-\infty, \infty)$．此外，常见的流盒（flow box）定理，或流在常点邻域中的直化定理在M_n上也同样成立．所有这些事实的证明都可以在[3]中找到．

这样，X在M_n上的积分线全体，或即方程(1)的轨线全体便确定M_n到它自身的一个单参数变换群，或M_n上的一个动力系统．

反过来，我们也可以在M_n上先抽象地定义一个流动$\varphi(t, x)$，或称之为实数群R对M_n的作用．[1]这就是一个连续映射$\varphi: R \times M_n \to M_n$，使得对一切$x \in M_n$与一切$t_1, t_2 \in R$都有：

$$\varphi(0, x) = x, \ \varphi(t_2, \varphi(t_1, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x), \tag{4}$$

则称$\varphi(t, x)$为M_n上的一个动力系统．对固定的x，集合$\{\varphi(t, x)\}_{t \in R}$称为过点$x$的轨线．若$\{\varphi(t, x)\}_{t \in R} = x$，则称$x$为奇点．当$\varphi$为可微映射时，称$\varphi(t, x)$为可微动力系统．对于$M_n$上的可微动力系统$\varphi(t, x)$，经过任一非奇点有唯一的轨线以及

1）对于更一般的群G在一集E上的作用以及由此产生的轨道空间的定义与性质可参考[9]卷 II, 12.10.

它在此点的有向切线。这些有向切线以及奇点的全体就构成 M_n 上的一个可微向量场。

注意：要描述 M_n 上的时变向量场，可以改为研究乘积流形 $N_{n+1}=M_n\times R$ 上的向量场

$$Z=X(x,u)+\frac{\partial}{\partial u}=\sum_{i=1}^{n}f_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial u},\tag{5}$$

其中 $X(x,u)\in T_xM$。此向量场局部地对应于非定常方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\cdots,x_n,t)\qquad(i=1,\cdots,n).\tag{6}$$

关于曲面上的动力系统，利用局部坐标系，我们也可以象平面定常系统一样来定义每一个孤立奇点的指标，它是一个整数。熟知的有下一十分重要的 Poincaré 定理：

定理 1. 若闭曲面M上的向量场X有有限个奇点 $O_1,O_2,\cdots,O_k$，它们的指标分别用 $\mathrm{ind}\ O_1,\cdots,\mathrm{ind}\ O_k$ 来记，则

$$\sum_{i=1}^{k}\mathrm{ind}O_i=\chi(M).\tag{7}$$

推论 1. 闭曲面中只有 T^2 和 K^2 上才有可能存在无奇点的向量场。

系 1. 设M为有边界的紧曲面，若其上的可微向量场X与M的边界处处横截相交或处处相切，且只有有限个奇点，则定理 1 对X也成立。

推论 2. 在 H_2 与 B_2 上也可能存在无奇点的向量场 X，如果X满足系 1 中的边界条件。

下面简要介绍有关流形上动力系统的七个问题，这些问题是研究曲面动力系统所必须知道的知识。

1. 轨道空间

前面已经提到，M上的动力系统 φ 的轨线充满整个 M，不同的轨线没有公共点，今把M上两点属于同一轨线看成是一种等价

关系，则M被除于这种等价关系所得的商空间V称为φ的轨道空间，记为 $V = M/\varphi$。我们有：

定理 2. 曲面M上流φ的轨道空间V是连通一维流形，具有可数基。如果φ没有奇点，则V中每一点的余集是一开集。

但即使是十分简单的曲面动力系统，它的轨道空间也可能不是 Hausdorff 空间，并且往往很难用一维图形把它恰当地表示出来。例如图 2.1(a) 中所给的既无奇点亦无闭轨的平面动力系统，其轨道空间只能用图 2.1(b) 或 (c) 之一来表示，其中诸点 a, b, c, d 依次表示图 2.1(a) 中 A, B, C, D 诸点所在的轨线。又图 2.1(b) 中的 $f(x)$ 表示R上开区间 $(a, +\infty)$ 的一个增同胚，我们约定把 x 与 $f(x)$ 等同为一点。图 2.1 (c) 中铅直线下端的箭头表示其下端是开的，但可进入 a 或 b 的任意小邻域。由此可见在这个例子里，轨道空间V中点 a 的任一邻域与点 b 的任一邻域必有公共点，即V不是 Hausdorff 空间。

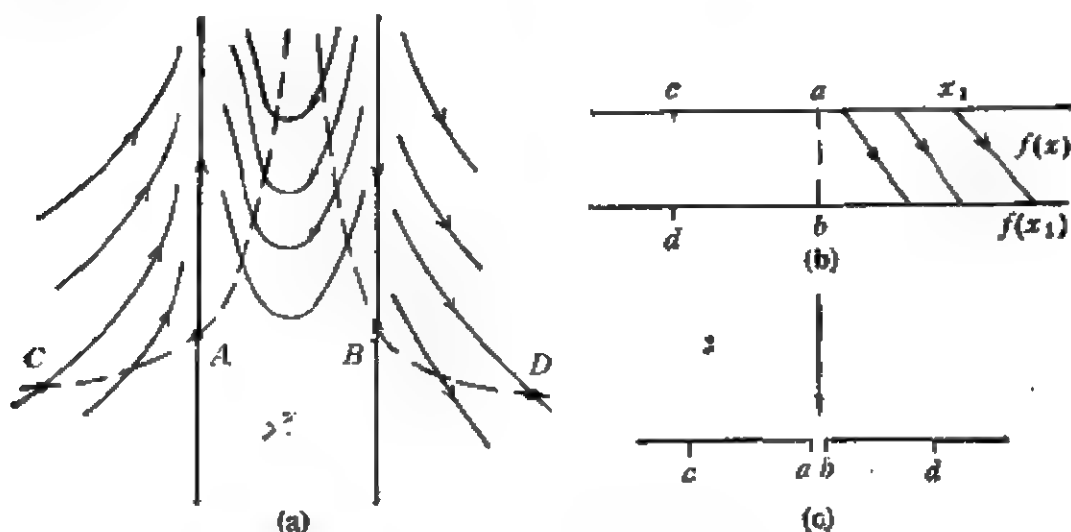


图 2.1

至于如图 2.2 所示的平面动力系统，轨线 γ_1, γ_2 与奇点O所对应的轨道空间中的三点 P_1, P_2, P_0 的任何两点都不能用邻域来分开，并且要象前例中那样用一个一维图形来表示轨道空间V也不

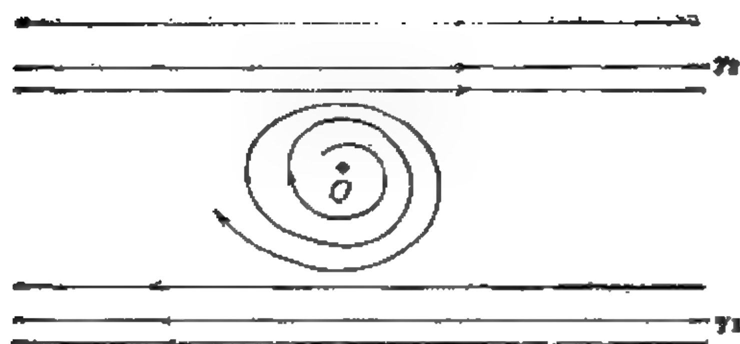


图 2.2

知道怎样画法。看来表示这个动力系统的轨道空间最好的办法还是用图 2.2，只要我们约定"每一轨线都当做一点看待"，并且知道这种新的点在轨道空间中的邻域是什么。

熟知的是：一个连通仿紧一维流形必微分同胚于 S^1，R，$[0,1]$ 或 $[0,1)$（见[3]）。但若在图 2.1(b) 的一维流形中先取 $t = f_1(x) = x^3$，再取 $t = f_2(x) = x^5$，则易见所得的两个一维非 Hausdorff 流形不是 C^1 微分同胚的，因为 $f_1^{-1}(f_2(x)) = x^{\frac{5}{3}}$，它在 $x = 0$ 不可微。换言之，图 2.1(b) 所示的拓扑空间具有两个非微分同胚的光滑结构。但是要在 Hausdorff 空间中举出一个这样的例子却是非常困难的（见[4]第六章）。

II. 离散动力系统

设 $\phi(x)$ 是流形 M 到它自己的一个同胚，则 $\{\phi^n(x)\}_{n\in Z}$ 称为 M 上的离散动力系统。显见若 $\varphi(t,x)$ 是流形 M 上的动力系统，则对任一 $t \neq 0$，$\{\varphi(kt,x)\}_{k\in Z}$ 也是 M 上的离散动力系统。事实上，M 上的离散动力系统乃是整数群 Z 在 M 上的作用：$Z \times M \to M$。离散动力系统除了有许多与连续动力系统类似的性质，如周期点，极限集等以外，我们还可以利用它的轨道（实际上，每一轨道都是可数无限多个点所构成的双向无限点列）定义等价关系和由

此而得到的轨道空间．这时，轨道空间与原空间维数相同．如：

$$S^1 = R/Z,\ \mathring{H}_2 = S^1 \times R = R^2/Z \times \{0\},$$

$$T^2 = \mathring{H}_2/Z = R^2/Z \times Z, \tag{8}$$

等等．

此外，自 20 世纪 60 年代开始蓬勃发展起来的、以 S.Smale 为首的微分动力系统理论和从 A.N. Sarkovskii 开始的区间映射理论（半动力系统）所研究的对象也是流形或区间上的离散动力系统．另外，计算数学中的叠代步骤也可以看成是半离散动力系统．它们与连续动力系统之间的另一种联系可在下一段中看到．

III．离散动力系统的扭扩（suspension）

在 II 中我们已经看到，可以取流形M上微分动力系统所确定的变换群中的一员来产生M上的一个离散动力系统．反过来，我们也可以由M上一个离散动力系统（它由某一微分同胚所产生）通过扭扩的手段而得到比M高一维的流形上的一个可微动力系统．

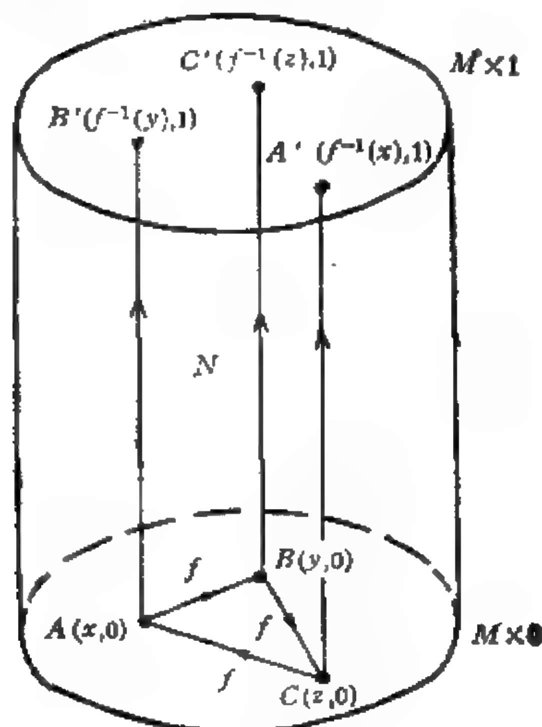


图 2.3

设 f 为微分流形 M 的一个微分同胚，映象

$$(x,u) \to (f^{-n}(x), u+n), \quad n \in Z \tag{9}$$

定义 Z 在乘积流形 $M \times R$ 上的作用．记

$$N = M \times R/Z$$

为商空间．形象地说，如果以 M 为底作高为 1 的柱体，并且对任何 $x \in M$，我们总把两点 $(x,0)$ 与 $(f^{-1}(x),1)$ 等同起来，如此得到的空间就同胚于 N．N 上的动力系统 X 以平行于柱面的导线的直线段来构成它的轨线，没有奇点．X 在 N 中的轨线与 f 在 M 中的(离散)轨道之间存在 1—1 对应，X 的周期轨线对应于 f 的周期点．例如，若 $f(x)=y$，$f(y)=z$，$f(z)=x$，则 x 是 f 的一个周期点．按(9)式，图 2.3 中的 $A(x,0)$ 应等同于 $A'(f^{-1}(x),1)=A'(z,1)$，$B(y,0)$ 应等同于 $B'(f^{-1}(y),1)=B'(x,1)$，$C(z,0)$ 应等同于 $C'(f^{-1}(z),1)=C'(y,1)$，故 $AB'BC'CA'$ 是扭扩动力系统的闭轨．我们称 N 为 M 借 f 所得到的扭扩流形．而 X 为 f 的扭扩场，可用 $\frac{\partial}{\partial u}$ 表示之．

定义 2. 设 f_1, f_2 是把流形 M_1 嵌入流形 M_2 的两个映射．如果存在同伦映射 $F: M_1 \times I \to M_2$，其中 $I=[0,1]$，使得 $F(x,0)=f_1(x)$，$F(x,1)=f_2(x)$ 对 $x \in M_1$，则称 f_1 合痕于 f_2．

合痕的概念和理论在曲面的粘合和分类问题上很有用处，读者可参阅[4]的第八、九两章．这里只举三个简单的例子，说明合痕与扭扩之间的联系．

例 1. S^1 到它自己的微分同胚 f 如果保持定向，则 f 合痕于恒等映射；如果 f 逆转定向，则它合痕于对称映射 $\theta \to -\theta$，这时 f 有两个不动点．

例 2. S_1 到自己的微分同胚 f 的扭扩流形 N 微分同胚于 T^2，当 f 保持 S^1 的定向时；N 微分同胚于 K^2，当 f 逆转 S^1 的定向时．在后一情况扭扩场有两个周期为 1 的周期轨道．

例 3. 若 M 的微分同胚 f 合痕于恒等映射，则它的扭扩流形

同构于乘积空间 $M\times S^1$。

IV. 动力系统的乘积与分解

定义 3. 设 $f_i:R\times M_i\to M_i$ $(i=1,2)$ 是两个动力系统，则在乘积流形 $M_1\times M_2$ 上由

$F(t,x\times y)=f_1(t,x)\times f_2(t,y)$，$t\in R$，$x\in M_1$，$y\in M_2$

所定义的动力系统 $F:R\times M_1\times M_2\to M_1\times M_2$ 称为两动力系统 f_1 与 f_2 的乘积。

例 4. R 上的流 $\varphi_k(t,x)=e^{kt}x$ 是向量场 $kx\dfrac{\partial}{\partial x}$ 或定常方程 $\dfrac{dx}{dt}=kx$ 的轨线，故一共只有三条，即原点(奇点)，R^+ 和 R^-。今若对非零实数 k_1,k_2 作 $\varphi_{k_1}(t,x)$ 与 $\varphi_{k_2}(t,y)$ 在 R^2 上的乘积流，则得平面上的向量场 $k_1x\dfrac{\partial}{\partial x}+k_2y\dfrac{\partial}{\partial y}$，或定常方程组

$$\frac{dx}{dt}=k_1x,\ \frac{dy}{dt}=k_2y.$$

随着 $k_1k_2>0$ 或<0，我们可以得到具结点或鞍点的平面轨线族。

例 5. R 上的流 $\varphi(t,x)=e^tx$ 与 S^1 上的旋转 $\psi(t,y)=y+\theta t$ 的乘积是圆柱 $R\times S^1$ 上的流 f，它有唯一的闭轨 $\{0\}\times S^1$，而一切其它轨线都是柱面上的螺线，当 $t\to-\infty$时每一螺线都以此闭轨为其极限集，即 $\{0\}\times S^1$ 是 f 的唯一的(不稳定)极限环。

例 6. S^1 上的旋转 $\varphi_1(t,x)=x+\theta_1t$ 与另一 S^1 上的旋转 $\varphi_2(t,y)=y+\theta_2t$ 的乘积是环面 $T^2=S^1\times S^1$ 上的流 $\varphi(t,x,y)=(x+\theta_1t,y+\theta_2t)$。当 θ_1/θ_2 为有理数时称为有理流，θ_1/θ_2为无理数时称为无理流。T^2 上的有理(无理)流也可以看成是 S^1 的有理(无理)旋转所产生的离散动力系统的扭扩。熟知的是：有理

流的轨线全是闭轨，而无理流的任一轨线在 T^2 上为遍历，即它的闭包是整个环面。

由例 4 可以看出，虽然因子空间中的动力系统的轨线族只有唯一的拓扑结构，但乘积流的轨线族却可以有不同的拓扑结构。

定义 4. 设 $f:R\times M\to M$ 是M上一动力系统，$\alpha:R\to R$ 是R的连续自同构 $t\to\alpha t$，$h:M\to N$ 为一同胚映射，则 $g=hf(\alpha h)^{-1}$ 是N上一动力系统，称 g 为由 f 借助于 (α, h) 诱导而得的动力系统。

例 7. 设 $h: R\times S^1\to R^2\backslash\{0\}$ 由

$$h(x,\theta)=e^x\theta,\quad x\in R,\ \theta\in S^1$$

所定义。α 为恒等映射。f 是例5 中 $R\times S^1$ 上的乘积流。则 g 是 $R^2\backslash\{0\}$ 上的动力系统。若再规定O为 g 的奇点，则 g 便成为 R^2 上的动力系统。它有唯一的(稳定)奇点 O，唯一的(不稳定)极限环，即单位圆，其它的轨线都是螺线。

最后提一下向量场在覆盖映射之下的提升 (lifting)。设 $f:\hat{M}\to M$ 为一覆盖映射，X为M上的向量场，则在 $\hat{M}$ 上存在唯一的向量场 $\hat{X}$，使

$$f^T\cdot\hat{X}=X\cdot f,$$

这里 f^T 是 f 所诱导出来的 $T\hat{M}$ 到 TM 上的映射。又若 $\gamma=f\hat{\gamma}$，则 $\hat{\gamma}$ 是 $\hat{X}$ 的积分线当且仅当 γ 是X的积分线。$\hat{X}$ 称为X在 $\hat{M}$ 中的提升。关于提升的其它性质可参阅[11]。

V. 动力系统的等价

今介绍不同动力系统之间的三种意义不全相同的等价性.

a. 拓扑共轭

定义 5. 设 $f:M\to M$ 与 $g:N\to N$ 分别为两个流形M与N上的同胚映射，或由它们所产生的离散动力系统。如果存在同胚 $h:M\to N$ 使得 $hf=gh$，则称 f 与 g 为拓扑共轭。如果 f,g,h 皆为微分同胚，例如都属于 $C^r(r\geqslant 1)$，则称 f 与 g 为 C^r 共轭。

拓扑共轭将轨线映到轨线，周期轨道映到周期轨道。但微分共轭的要求则更苛刻。例如，$x \longmapsto \frac{1}{2}x$ 与 $x \longmapsto \frac{1}{3}x$ 不是微分共轭。所以即使当 f 与 g 都是微分同胚时，我们通常也只研究它们是否为拓扑共轭的问题。

b. 连续流的流等价

定义 6. 设 φ 与 ϕ 分别为流形 M 与 N 上的流，α: $R \to R$ 由 $t \to \alpha t$，$\alpha > 0$ 定义。h: $M \to N$ 是一同胚映射。如果 $h\varphi = \phi h\alpha$，则称 φ 与 ϕ 为流等价。

显见，连续动力系统的流等价相当于离散动力系统的拓扑共轭。但是由于 h 不但把奇点映到奇点，开(或闭)轨线映到开(或闭)轨线，而且它还保持闭轨的周期之间的比例。所以有时甚至两个流的相图有相同的拓扑结构，但却非流等价。由此可见，要求两个动力系统为流等价仍嫌过于苛刻。下面的等价性要比流等价的要求较弱一些。

c. 拓扑等价

定义 7. M 上的流 φ 与 N 上的流 ϕ 称为在同胚 h:$M \to N$ 之下为拓扑等价，如果 h 把 φ 的轨线映到 ϕ 的轨线，并且保持定向。M 上的两个同胚 f 与 g 称为是拓扑等价，如果存在 M 的另一同胚映射，它把 f 的轨道映到 g 的轨道。

例 8. 稳定焦点邻域中的轨线图拓扑等价于稳定结点领域中的轨线图。映射 $x \longmapsto \frac{1}{2}x$ 与 $x \longmapsto \frac{1}{3}x$ 是拓扑等价的。

不难证明 S^1 旋转 $\frac{1}{7}$ 周与旋转 $\frac{2}{7}$ 周是拓扑等价的，但却不是拓扑共轭。关于在什么条件下可由离散动力系统的拓扑等价推出拓扑共轭的问题，可以参考[12]。

对于例 6 中 T^2 上的有理流与无理流，我们有：

定理 3. T^2 上一切有理流都是流等价。但对无理数 α 与 β，T^2 上的 α 无理流与 β 无理流为拓扑等价当且仅当存在以整数为

元素的二阶方阵A使得 $A\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \beta\end{pmatrix}$（证明见[8]）。

VI．流形上轨线的分类

流形M上连续动力系统的轨线也和平面动力系统一样，可以分为奇点、闭轨线和开轨线三种．但现在开轨线中又有两类本质不同的轨线，即一种是R到M中嵌入映射的象；另一种则仅为单射浸入的象，例如 T^2 上无理流的任一轨线就属于这一类。

其次，按通常常微定性理论或动力系统专著上对于轨道回归性的定义来看，奇点和周期轨线都具有回归性或非游荡性[8],[10]．[10]第五章还对一般度量空间中的非游荡运动作如下的细分：

奇点⊂周期运动⊂拟周期运动⊂概周期运动⊂回复运动 ⊂P式稳定运动⊂非游荡运动。

其中包含范围最广的非游荡运动的定义如下：

定义 8． 动力系统 $f(q,t)$ 中的点 p 称为非游荡点，如果对于任一包含它的邻域 $U(p)$，总能找到足够大的 $|t|$，使

$$U(p)\cap f(U(p),t)\neq\varnothing。$$

由此可见，虽然从几何图形来看，周期轨线应与普通轨线属于同一类，但是从动力系统的观点来看，则它应和 T^2 上处处稠密的无理流的轨线属于同一类，因为它们都是非游荡的。

我们知道，常微定性理论的创始人 H. Poincaré 在研究一般说来是无法求得通积分的一阶常微分方程(组)时，人为地引进时间参数 t，而把一阶方程(组)变为一阶定常动力系统，把积分线变为轨线．换言之，即引进运动的观点．这是一个伟大的创举，自此以后的一百年来，常微定性理论和抽象动力系统的理论就有了蓬勃的发展．然而就定常方程组来说，知道了原来未曾引进 t 时的方程(组)的积分线的全局拓扑结构以后，可以说问题也就解决得差不多了[1]．如果不论对于什么问题都要抓住 t 不放的话，有时也

1) 当然，在讨论奇点与孤立闭轨的稳定性，等时中心等问题时仍须考虑时间 t 的大小及正负。

会带来一些新的，但可能是重要性不很大的麻烦事。这一点我们在 V b 段已经看到。现在对轨道的回归性我们又再一次看到类似的情况。有鉴于此，我们认为[3]中对动力系统的轨线的正常性与回归性给以新的定义是可取的，由此也带来一些方便[1]。

定义 9. 流形M上动力系统X的轨线γ如果不是奇点，则称为非奇轨线．如果对非奇轨线γ存在X中的适当的可直化邻域U，使γ在 $U\cap\gamma$ 中只有一个弧段(或局部稠密)，则称γ为正常轨线(或局部稠密轨线)。既非奇点又非正常的轨线称为回归轨线。

注意：回归轨线不一定是局部稠密的。

定理 4. 一非奇轨线γ为正常的当且仅当它是M的一个局部闭子流形．γ 是局部稠密当且仅当存在M的一个开集U，使γ在U中为局部稠密。

定理 5. 设l是曲面M上向量场X的一条开截线，若l与一非奇轨线γ的交不是空集，则它必为一可数集 I. I 具有下列三种性质之一。

1) 当γ是正常轨线时，I是l上的离散集。

2) I 在l的某一开集上是稠密的，当γ为局部稠密轨线。

3) I 在l上无处稠密，但又无孤立点。这时I在l上的闭包$\bar{I}$ 是闭的完全集，同胚于 Cantor 集。我们称γ为例外轨线。

此定理中的情况 3) 在 T^2 上便可实现，见 §3.

定理 6. 设X是可定向流形M上的一个无处为零的向量场，则X的每一非闭轨线必与X的一条闭的横截线相交。

注意：如果X有奇点，则定理 6 不一定成立。

定义 10. 流形M上的向量场X的极小集是M的这样一个子空间，它非空、闭、在X之下不变；并且它的任何子集都不同时具有上述三个性质。

易见M上每一非空紧不变集必包含一极小集，从而任一轨线的闭包中必定含有极小集。

---

1) 实际上，定义 9 中所说的回归性是指轨线作为积分线看待时，它在其上一点的邻域U中的回归性．这不同于通常所理解的轨线关于时间而言的回归性。

M. Herman 在 $T^2 \times R$ 上造出无紧密极小集的解析向量场. 在 R^3 中是否存在无极小集的动力系统还不清楚.

定理 7. 紧连通二维流形M上的极小集若不是M本身,则不能有内点. M上的极小集只能是奇点、闭轨线、一例外轨线的闭包,或整个流形 M. 在最后一情况M只能是 T^2, 该事实的证明最先由 A. J. Schwartz 所得到,见[13],第七章附录.

值得注意的是: 例外轨线是开轨线, 而它的闭包又是异于M的闭集, 因而不含内点. 因此这一极小集E是个含有无限多条轨线的无内点闭集,其中任一轨线的闭包都只能是 E.

对于一般的紧 Hausdorff 空间,我们有:

定理 8. 设X是紧 Hausdorff 空间, Γ 是X中的流φ的轨线,则下列四件事彼此等价:

1) Γ 是 X 的一个闭子集,

2) Γ 是 φ 的奇点或闭轨,

3) $\omega(\Gamma) = \Gamma$,

4) $\bar{\Gamma} = \Gamma$.

VII. 线素场

定义 11. 若对流形M上的每一点 x, 在切空间 T_xM 中给定的不是一向量,而是一直线 L_x, 则如此所得的切丛 $T(M)$ 的子丛E称为M上的一个线素场.

由此定义知线素场不能有奇点, 因而由定理 1 后面的推论 1 和系 1 知道: 只有在 T^2, K^2, H_2, B_2 等四种曲面上有可能存在线素场. 显见当流形M上给定一无奇点向量场X时, 它也就决定了M上一个线素场,但其逆不一定成立. 当定义 11 中的子丛E为明显丛时,称E为可定向的, 这时由E可以决定M上两类(方向相反的)向量场. 属于同一类的向量场处处指向相同,所差的只是向量的长度. 当已经取定其中一类向量场时,E称为已定向的. 反之, 当子丛E不是明显丛时, E称为不可定向的.

可定向流形上的可定向线素场的例子容易举出. 下面举三个

其它例子。

例 9. 可定向流形上的不可定向线素场。

极坐标方程

$$\sin\frac{k\theta}{2}\,d\rho+\rho\cos\frac{k\theta}{2}\,d\theta=0$$

确定柱面 $R^2-\{0\}$ 上一线素场，当 k 为偶数时是可定向的，k 为奇数时是不可定向的。这由 $\theta=\frac{2n\pi}{k}$ 是积分半射线，且在其上有

$$\cos\frac{k\theta}{2}=\cos n\pi=(-1)^n$$

可知。因为上述线素场若为可定向的，则两相邻积分直线上的方向必定有一指向原点，而另一则离开原点。此事仅当有偶数条积分半射线通过原点时才是可能的。

例 10. 不可定向流形上的可定向线素场。

见图 2.4。

例 11. 不可定向流形上的不可定向线素场。

见图 2.5，其中左右两边倒向相接。若要相邻的轨线方向一致，则 A, C 或 B_2 上别处至少会出现一个奇点，与线素场的定义不合。

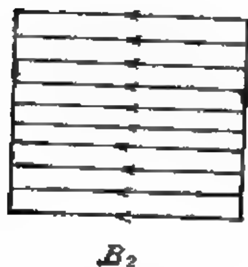


图 2.4

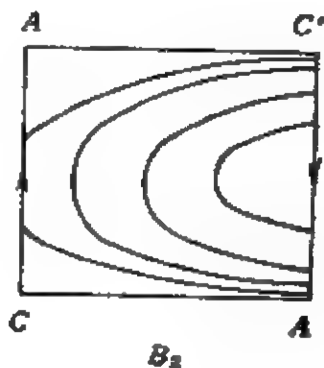


图 2.5

定理 9. R^n 中一单连通开集上的任一线素场必为可定向的。

定理 10. 对于流形M上的任一线素场 E，必定存在M的一个可定向两重覆盖流形 $\hat{M}$，使得E在覆盖映射 π: $\hat{M} \to M$ 之下的逆象 $\hat{E} = \pi^* E$ 是 $\hat{M}$ 上的可定向线素场。

定义 12. 当M的线素场E为可定向时，定义E的轨线为E上任一向量场X的轨线。当E为不可定向时，定义E的轨线为 $\hat{E}$ 上任一向量场 $\hat{X}$ 的轨线在M上的投影。

由此出发便可把前面关于向量场的周期轨线，正常轨线，局部稠密轨线，例外轨线，极小集等概念与结果推广到线素场来。例如，对应于定理 6 现在我们有：

定理 11. 无边紧曲面M上每一线素场必有一闭的横截线。

§3. 环面上两类特殊的动力系统

早在 H. Poincaré 的开创性论文"微分方程所定义的积分曲线"中,环面动力系统就和平面动力系统一样地受到重视而被研究过,并且得到一些奠基性的结果,如有理流与无理流,旋转数,遍历轨线以及例外轨线等等。但是时至今日,若与平面定性理论相比,则环面定性理论可以说还只是处在一个早期阶段。曾被人们研究得较多的只有两类很特殊的系统:一类是无奇点的环面系统;另一类是可以有孤立奇点,但还存在一个积分不变量的环面系统.本节将介绍这两方面的一些较新的成果,以后在 §§11—12 中我们将再介绍比它们更为一般的环面动力系统。

I. 无奇点环面动力系统

设已给动力系统

$$\dot{x} = P(x,y), \dot{y} = Q(x,y), \tag{1}$$

这里

$$P(x+1,y) = P(x,y+1) = P(x,y), Q(x+1,y) = Q(x,y+1) = Q(x,y). \tag{2}$$

假设 P,Q 连续,,且能保证(1)对初值问题有唯一的解。由(2)知 P,Q 有界,故(1)的任一解都在整个 t 轴上存在。条件(2)使我们得以把 (x,y) 平面上的单位正方形 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ 的对边叠合,而把(1)看成是一个环面 T^2 上的动力系统来加以研究。由于已设(1)没有奇点,故 P,Q 不同时为零。为简单起见,假设 $P(x,y)$ 在单位正方形中处处不为零[1]。于是(1)也可以消去 t 而成为 x,y 的方程

1) 当 $P,Q \in C^1$ 时可证必定存在坐标变换,使变换后的方程满足 $P(x,y) \neq 0$ 的性质。见[14]。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}=f(x,y), \tag{3}$$

其中 $f(x,y)$ 连续，且

$$f(x+1,y)=f(x,y+1)=f(x,y),$$

对一切 x,y。这时(3)的每一积分线必定穿过 y 轴。假设以$(0,\eta)$为初值的(3)的积分线是 $y=\varphi(x,\eta)$。此积分线必可向右延拓而与 $x=1$ 相交(但有可能先与 $y=1$ 相交若干次)，设交点为 $y_1=\varphi(1,\eta)=\phi(\eta)$。易见对于固定的 $x,\varphi(x,\eta)$ (从而 $\phi(\eta)$) 是 η 的单调递增函数。因此 $\eta\to\phi(\eta)$ 确定 y 轴到它自己 (因为 $x=1$ 和 $x=0$ 等同)的一个同胚映射 ϕ。又由(3)的解的唯一性和群的性质知有：

$$\begin{gathered}\varphi(x,\eta+m)=\varphi(x,\eta)+m,\\ \varphi(m,\varphi(n,\eta))=\varphi(n,\varphi(m,\eta))=\varphi(m+n,\eta),\end{gathered} \tag{4}$$

对任何整数 m,n 成立。再由周期性知(4)中第二个等式即

$$\phi^m\cdot\phi^n=\phi^n\cdot\phi^m=\phi^{n+m}. \tag{5}$$

以下几个定理是熟知的，证明从略(见[15],[16])。

定理 1. 当 $|n|\to\infty$ 时极限

$$\lim_{|n|\to\infty}\frac{\varphi(n,\eta)}{n}=\lim_{|n|\to\infty}\frac{\phi^n(\eta)}{n}=\rho \tag{6}$$

存在，其值 ρ 与 η 无关，而由方程(1)唯一确定，称为旋转数。ρ 为有理数的充要条件是 ϕ 的某个幂次存在不动点，即(3)存在闭积分线，或(1)存在周期轨线。

定理 2. 设 $f(x,y)$ 连续地依赖于一参数 α，则当 α 连续变动时，ρ 也随之而连续变动。

易见当 ρ 为有理数时，如果环面上除了闭轨线以外还存在非闭轨线，则它们的两端都必趋于不同的或相同的闭轨线。

今以 S 记线段 $x=0,0\leqslant y<1$。它在环面上是一个子午圆，可视为环面流的闭横截线。以 W_η 记 $y=\varphi(x,\eta)$ 向两个方向无限延长时与 S 的一切交点所成之集的极限点全体，那么我们有下一重要而有趣的定理(H. Poincaré)：

定理3. 当 ρ 为无理数时 W_η 与 η 无关，它是 S 上的一个确定的集合，记之为 W. W 在映射 ϕ 之下是不变的，并且或者 $W = S$，或者 W 是 S 上的一个 Cantor 集合(无处稠密的完备集)。

§2 例 6 所说的环面上的无理流，它可由方程

$$\frac{dy}{dx} = \alpha = \text{无理数} \tag{7}$$

确定，就是定理 3 的第一种情况(这时 $\rho = \alpha$)，即方程(7)的任一积分线的闭包都是整个环面。至于在定理 3 中的第二种情况，则过 W 中任一点的积分线的闭包都是同一个集合，它由过 W 中一切点的积分线全体所构成，称为环面流的例外极小集 Γ. 显然，例外极小集在环面上也是一个无处稠密的完备集。W 在 S 中的余集是可数无限个开区间，过任一开区间中任一点的积分线向两个方向延长时都必和这些开区间中的无数个相交，且以 Γ 作为它的 α 和 ω 极限集。

例外极小集的具体例子最先由 A. Denjoy 所得到(见[3]第四章)。Denjoy 还证明：如果 $f(x,y) \in C^1$，或是较弱一些，$\phi'(\eta)$ 连续且为有界变差函数，则(3)不可能有例外极小集，从而当 ρ 为无理数时它的任一积分线都是遍历的。

定理4. 当 ρ 为无理数时如果环面流(1)是遍历的，则 ϕ 拓扑共轭于圆 S 的角度为 $2\pi\rho$ 的旋转 γ_ρ，从而相应的两个连续流(1)与(7)为流等价。

注意：若(1)有例外极小集 Γ，则可证存在 S 到它自身的拓扑度为 1 的连续映射 h，使

$$h \circ \phi = \gamma_\rho \circ h,$$

且 h 把 W 的每一(开)余区间映到一点，但 h 在闭余区间以外是1—1 的(见后面的(10)式)。

在 §2 定理 3 中我们已经看到，T^2 上的任意两个无理流不一定是拓扑等价，从而更不一定是流等价。对于本节所讨论的无奇点流，简要地说：当 ρ 为有理数，而方程(3)并非如(7)所示的有理流时，它所能确定的不同拓扑类型也可以有无数种之多。对于无

奇点的环面 C^1 流，至少存在一条不同伦于零的闭轨是 ρ 为有理数的充要条件，这是熟知的古典结果(见[13] 第七章附录)。此结果最近在[17]中被推广到有奇点的情况去。当 ρ 为无理数，且方程(3)不一定是如(7)所示的无理流时，如果流属于 C^2 类，则分类问题可象无理流一样解决(见 [3] 第四章)。对于有奇点的情况，[17]证明 ρ 为无理数的充要条件是流有非闭的 P 式稳定轨道[1]。此外，当 ρ 为有理数时环面上无奇点流的拓扑分类问题可参阅[3]第四章 §1，此处从略。

对于有例外极小集的环面流，[18]，[19]研究了它们的分类问题，得到较为完整的结果。下面就来介绍[18]的工作。

以 $[a,b]$ 及 (a,b) 记单位圆 S 上闭的与开的逆时针方向量度的区间，$a \neq b$。对 S 上任一 Cantor 集 C，我们有

$$C = S \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i), \tag{8}$$

其中 $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \phi$，当 $i \neq j$ 时。C 中的点可以分为两类：一类是余区间的端点，其全体记为 A，称为可接近集；另一类是余区间端点的极限点，其全体记为 I，称为不可接近集。换言之，

$$I = S \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i], A = C \backslash I. \tag{9}$$

今在 S 上定义一等价关系：称 $x \sim y (\mathrm{mod} C)$，如果 $x = y$，或 x, y 同属于某一 $[a_i, b_i]$。

把 S 拓扑地看成实数轴上的区间 $[0, 1)$ 而集 C 则按创始者 Cantor 原来的定义来理解。就是说，C 中的点用三进位小数表示时永不出现 1。现在把 C 中每一点 P 的三进位小数表示式中的每一个 2 字都改为 1，并且把 S 中由这样得出的二进位小数所确定的点 P' 作为 P 的象，我们就得到 $C \xrightarrow{\text{onto}} S$ 的映射。此映射在 I

1) 注意，对于环面上的有奇点流，即使它是解析的，也可能有非闭的 P^+ 式稳定轨道。这样的例子早在 1938 年就已由 T. Cherry 作出了，见[20]。

上是 1—1 的，而在 A 上则 a_i 与 b_i 被映到同一点 d_i。今再补充规定：任一区间 $[a_i, b_i]$ 中一切点的象都是 d_i。于是我们得到一个 S 到 S 上的连续映射 p，具有性质

$$p(x) = p(y) \text{ 当且仅当 } x \sim y \ (\text{mod} C), \tag{10}$$

称 p 为 S 上的一个 Cantor 函数。把这一映射抽象化，以后凡对 S 上的一个全不连通的完备集我们都可以定义相应的 Cantor 函数。显见 $p(A)$ 是 S 的稠密子集；又限制 p 在 I 上时，它是 I 到 $p(I)$ 上的一个同胚。

如果以复数 $z(|z| = 1)$ 来表示 S 上的点，则对任一 $a \in S$ 有一旋转

$$M_a: M_a(z) = az \qquad (z \in S). \tag{11}$$

我们称 g 是 S 的一个产生元，如果集 $\{g^n\}_{n \in Z}$ 在 S 中稠密。显见此时 (S, M_g) 是 S 上的一个无周期点的离散动力系统。不难证明：

引理 1. 设 g 与 h 是 S 的两个产生元，则有：

1）(S, M_g) 有唯一的极小集 $W = S$。

2）(S, M_g) 的每一自同构[1]必具有形式

$$M_a, \text{ 对某一 } a \in S.$$

3）(S, M_g) 与 (S, M_h) 为同构当且仅当 $g = h$ 或 $g = h^{-1}$。

4）(S, M_g) 的每一自同态必为一自同构。

5）若 $\phi: (S, M_g) \xrightarrow{\text{onto}} (S, M_h)$ 是一同态，则必存在 $a \in S$ 以及整数 $n \neq 0$ 使得 $\phi(z) = M_a(z^n)$。

下面的定理实际上是定理 3 和定理 4 的合并和改述。

定理 5. 设 φ 是 S 的一个无周期点自同胚，则：

1）若 $\overline{\gamma(z, \varphi)} = S$ 对某一 $z \in S$，则 S 是 φ 的极小集，且 (S, φ) 同构于某一 (S, M_g)，其中 g 是 S 的一个产生元。

1）称 (X, φ) 与 (Y, ϕ) 为同态(同构)，如果存在一连续(同胚)映射 $\theta: X \to Y$ 使 $\theta \cdot \varphi = \phi \cdot \theta$。故同构即 §2 定义 5 中的拓扑共轭。当 $X = Y, \varphi = \phi$ 时称 φ 为自同态(自同构)。

2) 若 $\overline{\gamma(z,\varphi)} \neq S$ 对某一 $z \in S$，则必存在一 Cantor 集 $C \subset S$，它是 (S,φ) 的唯一的极小集；并且对于任一 $x \in S \setminus C$，常有 $\overline{\gamma(z,\varphi)} \setminus \gamma(z,\varphi) = C$。

今问：已给 S 中两个 Cantor 集 C_1 与 C_2，和相应的 Cantor 函数，以及映 S 到 S 上的一个映射 φ，能否找到另一映射 ϕ，使 $\phi(C_1) = C_2$？下面的定理回答了这一问题。

定理 6. 设 C_1 与 C_2 是 S 中两个 Cantor 集，相应的 Cantor 函数为 p_1, p_2。设 φ 是 S 到 S 上的映射，使得对一切 $x \in S$，$\varphi^{-1}(x)$ 为有限多值，又

$$\varphi \cdot p_1(I_1) \subseteq p_2(I_2). \tag{12}$$

则必存在另一 S 到 S 上的连续映射 ϕ，使

$$p_2 \cdot \phi = \varphi \cdot p_1 \text{ 且 } \phi(C_1) = C_2. \tag{13}$$

ϕ 是同胚当且仅当 φ 是同胚，且在(12)中等号成立。

证. 注意 $p_2^{-1} \cdot \varphi \cdot p_1$ 定义 I_1 到 I_2 上的一个连续映射，我们将证明它关于 I_1 与 I_2 上的相对均匀性是均匀连续的。对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在一有限集 $F_2 \subseteq p_2(A_2) = S \setminus p_2(I_2)$，具有如下的性质：若 $z, w \in I_2$，且当 $a \in A_2 \cap (z, w)$ 时有 $p_2(a) \notin F_2$，则必有 $|z - w| < \varepsilon$。由于 $\varphi \cdot p_1(A_1) \supseteq p_2(A_2)$，故

$$F_1 = \varphi^{-1}(F_2) \subseteq p_1(A_1) = S \setminus p_1(I_1), \tag{14}$$

F_1 是有限集，故可取 $\delta > 0$ 使得当 $z, z' \in I_1$ 且 $|z - z'| < \delta$ 时有

$$F_1 \cap (p_1(z), p_1(z')) = \varnothing \text{ 或 } F_1 \cap (p_1(z'), p_1(z)) = \varnothing.$$

记 $w = \varphi \cdot p_1(z), w' = \varphi \cdot p_1(z'), w, w' \in S$。为确定起见，假设 $F_1 \cap (p_1(z), p_1(z')) = \varnothing$。则由连续性，$\varphi^{-1}(x) \cap F_1 = \varnothing$ 对 (w, w') 或 (w', w) 中的所有 x 成立。由前面对 F_2 的选取即知

$$|p_2^{-1}\varphi \cdot p_1(z) - p_2^{-1} \cdot \varphi \cdot p_1(z')| = |p_2^{-1}(w) - p_2^{-1}(w')| < \varepsilon,$$

由此可见 $p_2^{-1} \cdot \varphi \cdot p_1$ 是闭集 I_1 上的均匀连续映射。因此它可被唯一地拓广为 C_1 上的映射 ϕ（见[21]第七章，），显见有 $p_2 \cdot \phi = \varphi \cdot p_1$。又因 $\varphi \cdot p_1(I_1)$ 在 S 中稠密，故 $\phi(C_1) = C_2$。

剩下来的是要把ψ拓广到整个 S。设 $\{(a_i, b_i)\}_1^\infty$ 为 C_1 的余区间集，或是 $\psi(a_i)=\psi(b_i)$，或是 $\psi(a_i)$ 与 $\psi(b_i)$ 为 C_2 的某一余区间 (a,b) 的端点。在后一情况，设 ψ_i 是任一 $[a_i,b_i]$ 到 $[a,b]$ 上的同胚映象，把ψ拓广到区间 $[a_i,b_i]$ 上。最后在 S 上定义 ψ 如下：

$$\psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & 若\ x\in C_1;\\ \psi(a_i), & 若\ x\in(a_i,b_i),\ 而\ \psi(a_i)=\psi(b_i);\\ \psi_i(x), & 若\ x\in(a_i,b_i),\ 而\ \psi(a_i)\neq\psi(b_i).\end{cases} \quad (15)$$

定理的第二部分由下面的事实可知：(12)中等式成立当且仅当对一切 i，$\psi(a_i)\neq\psi(b_i)$。

下面研究S的无周期点同胚的分类问题。设φ是 S 到 S 上的一个同胚，无周期点，且(S,φ)有一 Cantor 极小集 C。若(a,b)是C的一个余区间，则 $\varphi[(a,b)]$ 仍是C的一个余区间，且

$$\varphi^n[(a,b)]\neq(a,b),\ 对一切\ n\neq 0.$$

因此 $x\sim y\ (\mathrm{mod}C)$ 当且仅当 $\varphi(x)\sim\varphi(y)(\mathrm{mod}C)$。借助于$C$的 Cantor 函数 p，由φ可导出 S 到 S 上的一个同胚ψ，使 $p\cdot\varphi=\psi\cdot p$。$p$ 是 (S,φ) 到 (S,ψ) 上的一个同态，把φ的极小集C映到ψ的极小集 $p(C)=S$。由定理 5 知可设 $\psi=M_g$，g 是S的一个产生元。如果我们选取g使 $\mathrm{Im}g>0$，则其值由φ唯一确定，记为 $\gamma(\varphi)$。$\gamma(\varphi)$ 其实就是ψ的旋转数，它是φ的一个不变量。

其次，定义 $\mathfrak{S}(\varphi)=p(I)$，当$\varphi$有 Cantor 极小集 $C\subset S$；否则，定义 $\mathfrak{S}(\varphi)=S$。我们称S的两个子集 S_1 与 S_2 是可重合(congruent)的，如果存在一 $z\in S$ 使 $M_z(S_2)=S_1$。记为 $S_1\equiv S_2$。显见，若 p_1, p_2 是S上的两个 Cantor 函数，它们都是 (S,φ) 到 $(S,\psi)=(S,M_{\gamma(\varphi)})$ 上的同态，则必 $p_1(I)\equiv p_2(I)$。换言之，$\mathfrak{S}(\varphi)$ 由φ唯一决定，除了一个旋转以外。反之，可证：

定理 7. 设 $\mathfrak{S}_1$ 是S的一个子集，g是S的一个产生元，$\mathrm{Im}g>0$，若 $S\backslash\mathfrak{S}_1$ 为可数集，且 $M_g(\mathfrak{S}_1)=\mathfrak{S}_1$，则存在$S$到$S$的一个无周期点的同胚 ψ_1，使 $\gamma(\psi_1)=g$，$\mathfrak{S}(\psi_1)\equiv\mathfrak{S}_1$。

证. 1) 若 $\mathfrak{S}_1=S$，则取 $\psi_1=M_g$ 即可。

2) 今设 $\mathfrak{S}_1 \neq S$，设 C 是 S 中一 Cantor 集。
于是存在 S 上一 Cantor 函数 p 使 $p(I)=\mathfrak{S}_1$。在定理 6 中取 $C_1=C_2=C, p_1=p_2=p, \varphi=M_g$，由 $M_g(\mathfrak{S}_1)=\mathfrak{S}_1$ 知(12)式成立。于是存在一个 S 到 S 上的同胚 ϕ_1 使 $\phi_1(C)=C$，且 $p\cdot\phi_1=M_g\cdot p$，由此可见 ϕ_1 没有周期点，且 S 不是 ϕ_1 的极小集。设 (S,ϕ_1) 的唯一 Cantor 极小集为 C'，则 $C'\subseteq C$，且 $p(C')=S$。从而 $I\subseteq C'$ 且 $C=C'$。由前面的定义显见 $\gamma(\phi_1)=g$，$\mathfrak{S}(\phi_1)=\mathfrak{S}_1$。

定理 8. 设 θ_1,θ_2 是 S 的两个无周期点同胚，相应的 Cantor 极小集为 C_1,C_2，Cantor 函数为 p_1,p_2，设 φ 是 S 到 S 上的连续映射，$\varphi^{-1}(x)$ 为有限集，且有

$$\varphi\cdot p_1(I_1)\subseteq p_2(I_2),$$

又 (16)

$$p_2^{-1}\cdot\varphi\cdot p_1\cdot\theta_1(x)=\theta_2\cdot p_2^{-1}\cdot\varphi\cdot p_1(x),$$

对一切 I_1 中的 x 成立。则必存在 S 到 S 上的连续映射 ϕ，使 $\phi(C_1)=C_2$，$p_2\cdot\phi=\varphi\cdot p_1$，且 $\phi\cdot\theta_1=\theta_2\cdot\phi$。$\phi$ 可成为同胚当且仅当在(16)的第一式中等式成立，且 φ 为一同胚。

证. 设 ϕ 是 $p_2^{-1}\cdot\varphi\cdot p_1$ 在 C_1 上的拓广(由定理 6 知之)，则 $\phi\cdot\theta_1(x)=\theta_2\cdot\phi(x)$ 对一切 $x\in C_1$；这是因为 ϕ 是连续映射，且 I_1 在 C_1 中稠密。略微改变定理 6 中的拓广法，可将 ϕ 拓广到整个 S，且使

$$\phi\cdot\theta_1(x)=\theta_2\cdot\phi(x),\ \text{对一切}\ x\in S$$

成立。特别地，我们可以找到一系列的余区间 $\{(a_i,b_i)\}$，使 C_1 的每一余区间有唯一的表达式 $\theta_1^n[(a_i,b_i)]$。若 $\phi(a_i)\neq\phi(b_i)$，则定义 ϕ_i 如前。最后，若

$$x\in\theta_1^n[(a_i,b_i)],\ \text{且}\ \phi(a_i)\neq\phi(b_i),$$

则定义 $\phi(x)=\theta_2^n\cdot\phi_i\cdot\theta_1^{-n}(x)$。定理证毕。

作为此定理的推论，我们有下面的分类定理：

定理 9. 设 φ_1,φ_2 是 S 的无周期点同胚，则 (S,φ_1) 同构于 (S,φ_2) 当且仅当 $\gamma(\varphi_1)=\gamma(\varphi_2)$，$\mathfrak{S}(\varphi_1)=\mathfrak{S}(\varphi_2)$。

类似于此，也可以讨论两个无周期点的离散动力系统的同态

问题。注意，若ϕ是S到S的任何一个连续映射，则必存在唯一的一个整数n，使ϕ同伦于$X(z)=z^n$。称n为ϕ的映象度，记为$\deg\phi$(见[1]或[18])。

定理 10. 设φ与θ是S的两个无周期点的同胚。为使(S,φ) onto (S,θ)的同态ϕ存在，其充要条件是：对某一非零整数n有

$$[\gamma(\varphi)]^n=\gamma(\theta),[\phi(\varphi)]^n\subseteq\phi(\theta), \tag{17}$$

此时$|\mathrm{dge}\,\phi|=|n|$。

注意 1. 一般而论，定理9与定理10只有理论上的意义。对于已给的无奇点环面动力系统(1)，不但判别其是否遍历或有无例外极小集是十分困难的事，就是要确定其旋转数也远非易事。只有对于具有积分不变量的环面系统，有时才能容易地确定其旋转数。

注意 2. 由以上的讨论可以看出，研究环面无奇点动力系统与研究圆到它自身的映射有极密切的关系。关于圆的微分同胚有很困难的问题以及有关的近代专著，见[22]。

II. 有积分不变量的环面系统

关于这种系统的研究最先见于[23]，[24]。在[23]中得到：

定理 11. 设有环面系统

$$\dot{x}=X(x,y),\quad \dot{y}=Y(x,y), \tag{18}$$

其中X，$Y\in C^1$，对x，y有周期1，没有公共零点，且$\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}=0$。设

$$X=a_{00}+\sum nC_{mn}e^{2\pi i(mx+ny)},$$
$$Y=b_{00}-\sum mC_{mn}e^{2\pi i(mx+ny)}.$$

若$a_{00}\neq0,b_{00}\neq0$，且a_{00}/b_{00}为一无理数，则(18)不存在周期轨道，并且它所确定的环面流是遍历的。

后来[25]，[26]又研究了有有限个奇点的是积分不变量的方程：

$$\dot{\theta}=A(\theta,\varphi),\dot{\varphi}=B(\theta,\varphi),\tag{19}$$

其中 A,B 对 θ,φ 有周期 2π，属于 C^2，且 $\frac{\partial A}{\partial\theta}+\frac{\partial B}{\partial\varphi}=0$.在[26]中得到：

定理 12. 方程(19)不可能有极限环。记

$$J_1=\int_0^{2\pi}A(\theta,0)d\theta,J_2=-\int_0^{2\pi}B(0,\varphi)d\varphi.$$

若 J_1 与 J_2 可通约，则(19)的一切轨线为闭，除了连接鞍点的分界线以外。若 J_1 与 J_2 不可通约，则当它没有奇点时，任一轨线都在环面上处处稠密。

作者举例说明 J_1/J_2 不一定是旋转数，但它却起了旋转数对方程(6)所起的同样作用。

[27]深入研究了方程(18)的全局相图的拓扑分类问题，指出在(18)有奇点且旋转数 ρ 为无理数的情况，有可能既存在中心型奇点，又存在非明显 P 式稳定轨线，纠正了[26]的一个错误结论。下面介绍[27]中的主要结果。

设方程(18)满足下列三个条件：

1°) $X,Y\in C^1$，对 x,y 有周期 1.

2°) (18)存在积分不变量 $U(x,y)\in C^1$，即应有

$$\frac{\partial(UX)}{\partial x}+\frac{\partial(UY)}{\partial y}=0.$$

3°) (18)只有孤立奇点.

又设

$$\rho=\frac{\int_0^1\int_0^1 U(x,y)Y(x,y)dxdy}{\int_0^1\int_0^1 U(x,y)X(x,y)dxdy}\tag{20}$$

存在(可能为∞)，则下面两个定理成立。

定理 13. (18)的所有的轨线，除了连接奇点的分界线以外，都是闭轨的充要条件是 ρ 为有理数.

定理 14. 若 ρ 为无理数，且(18)无中心型奇点，则整个环面

是一非明显 P 式稳定轨线的闭包。

为了证明这两个定理，先证：

引理 2. 设方程(18)满足上述的条件 1)，2)，3)。则它的非明显 P^+(或 P^-)稳定轨线的闭包充满一区域 $\mathfrak{D}\subseteq T^2$。如果 $\mathfrak{D}\neq T^2$，则 $\mathfrak{D}$ 的每一边界分支是一同伦于零的闭曲线，它由奇点以及连接它们的轨线所构成。

证. 设 $f(p, I^+)$ 为自 p 点出发的非明显 P^+ 稳定半轨。取 $q\in f(p,I^+)$，作以 q 为内点的无切线段 $\overline{AB}$，可证 $f(p, I^+)$ 与 $\overline{AB}$ 的交点全体在一包含 q 点的子线段上必为处处稠密。因若不然，则由 §2 定理 5 知道这些交点的闭包是 $\overline{AB}$ 上一个无处稠密的完全集（Cantor 集），它有无数多个余区间。由于已设(18)只有有限个奇点，可知从某一正整数 k 开始，从余区间 (C_k,D_k) 中的点出发的一切正半轨线在下一次与 $\overline{AB}$ 相交时，交点将全部位于另一余区间 (C_{k+1},D_{k+1}) 中。这些正半轨线以及两线段 (C_k,D_k)，$(C'_{k+1},D'_{k+1})\subseteq(C_{k+1}, D_{k+1})$ 一起围成一开区域 G_k。从 G_k 中出发的正半轨将永远不再与 G_k 相遇，这是和有积分不变量的动力系统的“集合的回归线”(见[10]第六章 §3)相矛盾的。

既然 $f(p,I^+)$ 与 $\overline{AB}$ 的交集的闭包不是无处稠密，那么仍由 §2 定理 5 即知交集的闭包应包含一个以 q 点为内点的整条线段，从而 $\overline{f(p,I^+)}$ 应充满环面上的一个区域 $\mathfrak{D}$。$\mathfrak{D}$ 可能就是 T^2。如果 $\mathfrak{D}\neq T^2$，则它的边界是一些闭曲线。每一条边界闭曲线都必同伦于零。否则，环面沿此曲线割开后将得一柱面，它拓扑等价于平面上的圆环域，其上不可能有非明显的 p^+ 稳定轨线。边界曲线是(18)的不变集，由一些奇点以及连接奇点的分界线所构成。$\mathfrak{D}$ 的边界与 $\mathfrak{D}$ 中轨线的相互关系读者可从后面的图 3.1 看出。

同样，由于“集合的回归性”可知(18) 没有全不稳定或全稳定型奇点，在奇点的邻域中没有抛物域与椭圆域，并且双曲域也只有有限个(见[13]第七章 §8)，故只有有限条分界线终止于每一孤立奇点。

回忆定理 12 中已知(18)不能有极限环的事实，可知现在环

面上的轨线的拓扑结构只可能有下列三种类型:

A. 没有非明显的 P 式稳定轨线,环面被闭轨线所充满;或是环面被分解为若干个充满闭轨线的单连通域与圆环域,它们的边界由奇点和连接奇点的分界线构成。

B. 存在充满整个环面的非明显 P 式稳定轨线,其中每一条轨线的闭包都是整个环面。

C. 有非明显的 P 式稳定轨线,但其闭包不是整个环面。余集是若干个二维胞腔,其中有中心型奇点,闭轨线,以及连接鞍点型奇点的分界线所构成的闭曲线(不能按 t 来定向)。

引理 3. 设系统(18)满足(20)式前的条件 1°),2°),3°)。

1) 若它存在非明显 $P^+(P^-)$ 稳定轨线 $f(p,I^+)(f(p,I^-))$, L 是 $f(p,I^+)(f(p,I^-))$ 在 R^2 中的提升。它的参数方程是 $x=\varphi(t), y=\phi(t)$, 则

$$\lim_{\substack{t\to+\infty \\ (t\to-\infty)}} \frac{\phi(t)}{\varphi(t)}=\mu,\ \mu \text{ 为一无理数。}$$

2) 若它存在一不同伦于零的闭轨 γ, $\tilde{\gamma}$ 是 γ 在 R^2 中的提升,有参数方程: $x=\tilde{\varphi}(t), y=\tilde{\phi}(t)$, 则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\tilde{\phi}(t)}{\tilde{\varphi}(t)}=\nu,\ \nu \text{ 是一有理数。}$$

证明与定理 1 的证明类似。但这里容许奇点存在,故叙述方式不同。证明从略。

现在注意,由条件 2°)知有 $\dfrac{\partial(UX)}{\partial x}+\dfrac{\partial(UY)}{\partial y}\equiv 0$。故存在一函数 $H(x,y)$, 在 R^2 上定义,使

$$\frac{\partial H}{\partial y}=UX,\quad \frac{\partial H}{\partial x}=-UY, \tag{21}$$

而 $H(x,y)=\text{const}$ 是(18)在 R^2 中的首次积分。$H(x,y)$ 不一定是周期函数,但由(21)知道它的两个偏导数对 x,y 有周期 1, 故可写

$$H(x,y)=ax+by+h(x,y), \tag{22}$$

易见上式中的 a,b 可由

$$\begin{aligned} a &= -\int_0^1\int_0^1 U(x,y)Y(x,y)dxdy, \\ b &= \int_0^1\int_0^1 U(x,y)X(x,y)dxdy \end{aligned} \tag{23}$$

决定。由(20)式知 a,b 不能同时为零，否则 ρ 不能确定。

下面证明定理 13。

充分性。设 ρ 为有理数，又(18)存在非明显 P^+(或 P^-) 稳定轨线 l。设 L 是 l 在 R^2 中的提升，其方程为 $x=\varphi(t), y=\phi(t)$。把它们代入(22)式后其值应与 t 无关，即有

$$a\varphi(t)+b\phi(t)+h(\varphi(t),\phi(t))\equiv C。$$

当 $t>0$ 时不妨设 $\varphi(t)\neq 0$。以 $\varphi(t)$除上式两边，再令 $t\to+\infty$，注意 $h(\varphi(t),\phi(t))$ 有界，即得

$$a+b\cdot\mu=0,$$

其中 μ 由引理 3 确定，是无理数.但又有 $\mu=\rho$ 为有理数，矛盾.故此时 (18) 不存在非明显 P 式稳定轨线。然后由引理 3 之前的分类，知环面流此时只能出现 A 类结构。

必要性。今设(18)的轨线的拓扑结构属于 A 类，则有两种可能：

a) 存在一不同伦于零的闭轨；

b) 每一闭轨都同伦于零。

对情况 a)，由引理 3 知 ρ 必为有理数，证明与充分性类似。

对情况 b)，由组合拓扑学知环面上所有被闭轨线充满的二维胞腔一起构成环面的一个胞腔分割。由于环面的一维 Betti 数不为零，故存在一个由奇点和连接它们的轨线所构成的一维闭链，它不同伦于零。然后仿前可证 ρ 应是有理数。

最后，说明C 类全局拓扑结构是可能存在的。为此，设有环面上的无理流(7)、设 p 是其一轨线 Q_4pQ_3 上的一点。将环面在 p 点扩张以得一个以 p 为内点的二维胞腔，然后挤进一个有两个中心和两条有一公共轨线段的分界线环所包围的单连通区域，即得

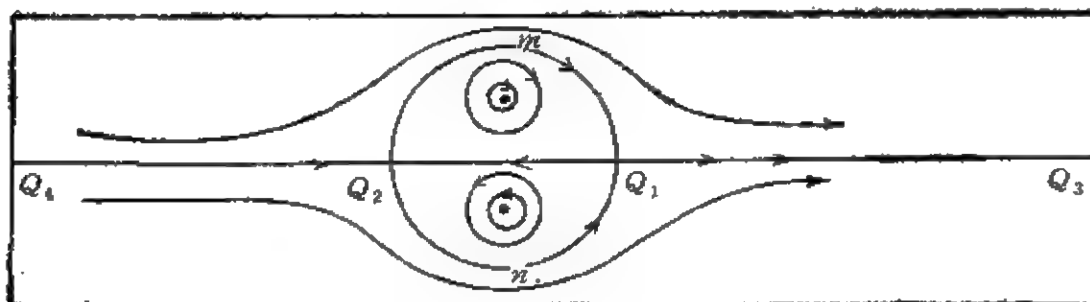


图 3.1

如图 3.1 所示的，环面上的全局轨线图。

注意 1: 由于 Q_1Q_3 为正向 P 式稳定，而 Q_4Q_2 为负向 P 式稳定，所以它们不可能接合。P 式稳定轨线的闭包有边界线 $Q_1nQ_2mQ_1$。

注意 2: 为使挤进单连通域 $Q_1nQ_2mQ_1$ 以后的无理流仍保持为有积分不变量的系统，且 $\widehat{Q_2mQ_1}$ 与 $\widehat{Q_2nQ_1}$ 上流的方向与外面一致，可知必须有两个中心区域而不是一个。

定理 14 的证明是明显的。既然 ρ 是无理数，那么由定理 13 即知A类拓扑结构不可能存在。然后再由无中心型奇点的假设，知道C类拓扑结构也不存在。故只能是B类拓扑结构。

最近，[28]就以下几点改进或推广了[27]的结果:

1. 证明当 $a^2+b^2\neq 0$ 时由(20)式所定义的 ρ 就是旋转数。

2. 证明当 $a^2+b^2\neq 0$ 而 ρ 为有理数时(18)必存在不同伦于零的闭轨。

3. 若 $a=b=0$，则(18)没有非明显的 P 式稳定轨线。

4. 若 $a=b=0$ 或 ρ 为有理数，则环面被奇点和奇闭轨分成三种类型的环域:

i) 内部充满闭轨，内境界为中心点的环域;

ii) 内部充满不同伦于零的闭轨，内境界由若干个 i) 类环域的外境界线构成;

iii) 内部一切闭轨以及内外境界线都不同伦于零的环域。

5. 指出当 $a=b=0$ 时，一般来说，不好定义(18)的旋转数。

[17]中利用 A. Weil 的定理(见[29]):

定理 15. 设 $\alpha:[0,\infty)\to T^2$ 为环面上一简单曲线,$\tilde{\alpha}:[0,\infty)\to R^2$ 是 α 在 R^2 中的提升. 如果当 $t\to\infty$ 时 $|\tilde{\alpha}(t)|\to\infty$,则 $\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{\alpha}(t)/|\tilde{\alpha}(t)|$ 存在。又若 T^2 上有两条这种简单的,互不相交曲线 α,β, 则

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{\alpha}(t)/|\tilde{\alpha}(t)| = \pm\lim_{t\to\infty}\tilde{\beta}(t)/|\tilde{\beta}(t)|$$

定义环面流的旋转数与旋转方向。除了前面提到的结果以外,[17]对于有积分不变量的环面流(18)也得到与[28]类似的一些结果. 此外[17]中还给出一些计算(18)的旋转数的实例,其中多数属于环面三角多项式系统,对它们中的最简单者以后在 §11 中还要作仔细的讨论。

§ 4. Klein 瓶与 Möbius 带上的动力系统

对于 Klein 瓶 K^2 上的无奇点动力系统，早在 1924 年 H. Kneser[30] 就证明了它必定存在周期轨线。1969 年 N. Markley[29] 推广了 Kneser 的结果，证明 Klein 瓶上的连续流(可能有奇点)的每一 P^+ 或 P^- 稳定轨线必为周期轨线，由此可容易地推导出 Kneser 定理。[29]主要是研究环面上的动力系统，其中除了 §3 定理 15 的证明以外，还证明了下一有趣的：

定理 1. 设 $z_0 \in R^2$，过 z_0 的平面流在环面上的投影 $p(z_0)$ 为 $P^+(P^-)$ 稳定，但不是周期轨线，则过 z_0 的正半轨 $\gamma^+(z_0)$(负半轨 $\gamma^-(z_0)$)不可能位于两条平行的有理直线之间。

其实，这两定理的几何意义是明显的。§3 定理 15 表示存在旋转数，本节定理 1 表示 P 式稳定非周期轨线的旋转数必为无理数。

本节将首先介绍 C. Gutierrez[31] 给出的、Markley [29] 中关于 K^2 上连续流的定理的一个新证明，然后介绍朱德明关于 K^2 与 B_2 上连续流的分类问题方面的一些最新的成果[32]。

为了证明[29]中的上述定理，需先证明两个引理。

引理 1. 设 γ 为二维流形 M^2 上连续流 φ 的非闭 P^+(或 P^-) 稳定轨线，则经过 γ 上任一点 p 必存在 φ 的横截闭曲线。

证. 先给两个定义. 设 C 是 φ 的一条横截闭曲线。φ 的一段轨线 $\overset{\frown}{p_1p_2}$ 称为 C 弧，如果

$$\overset{\frown}{p_1p_2} \cap C = \{p_1, p_2\}.$$

称一 C 弧 $\overset{\frown}{p_1p_2}$，$p_1 \neq p_2$，是单边(双边)的，如果 $\overset{\frown}{p_1p_2}$ 与 C 上连接

p_1 与 p_2 的弧所构成的单闭曲线在 M^2 上是单边(双边)的。

今设 $\overset{\frown}{pq}$ (可能 $p=q$)是 φ 的 P^+ 稳定轨线 γ 上的一段弧，它不退缩为一个奇点，则 $\overset{\frown}{pq}$ 必含在一流盒之中.在图 4.1(a) 中，A 表示以过 p 点的截线 Σ 为中心线的流盒：$A=\{\varphi_t(\Sigma),\ |t|\leqslant\varepsilon\}$。由于 $p\in\omega(\gamma)$，故 γ^+ 应与 Σ 无数次相交。设 $\tau>0$ 是使 $\varphi_\tau(p)=q\in\Sigma$ 的最小的 t 值，$\Omega\in\Sigma$ 是一包含 p 点的子线段,则 $B=\{\varphi_t(\Omega)|,0\leqslant t\leqslant\tau\}$ 是另一包含 $\overset{\frown}{pq}$ 的流盒。记 $p_0=$

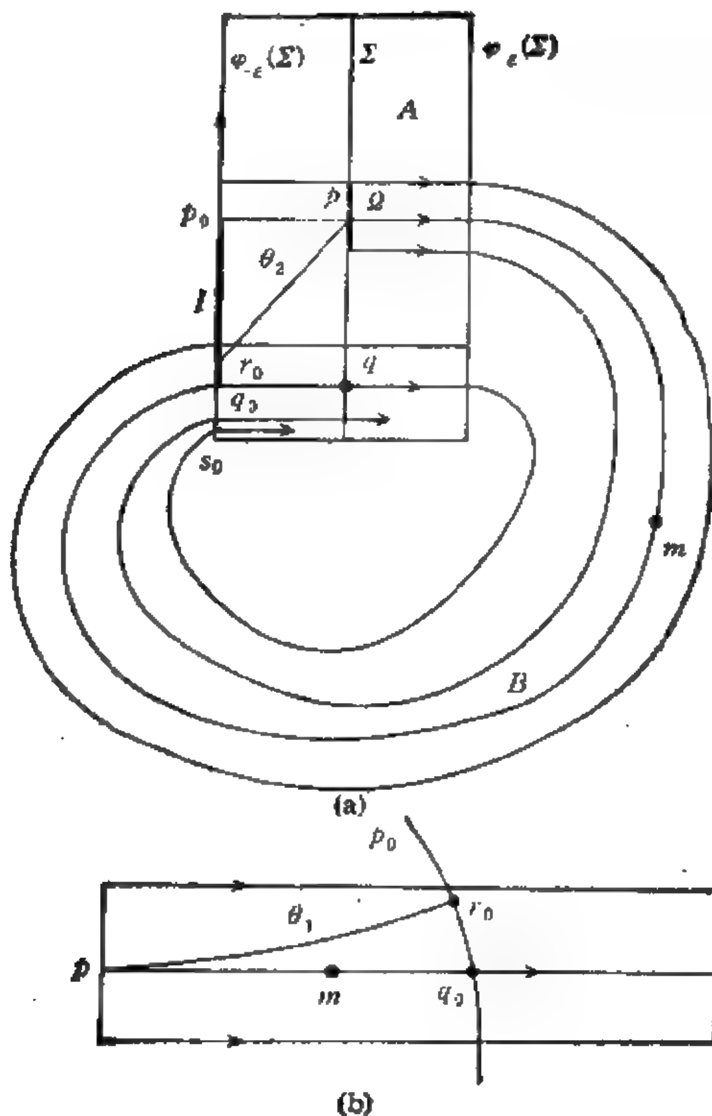


图 4.1

$\varphi_{-s}(p), q_0=\varphi_{-s}(q)$。以$<$记 $\varphi_{-s}(\Sigma)$ 上的一个定向，下面只考虑 $q_0<p_0$ 的情况，因为 $q_0>p_0$ 的情况是类似的.记

$$I=\{s\in\varphi_{-s}(\Sigma)|, q_0\leqslant s\leqslant p_0\}.$$

如果 I 弧 $\overset{\frown}{p_0q_0}$ 是双边的，则取 $r_0\in I\cap B$，于是有 $q_0<r_0<p_0$。以 θ_1,θ_2 分别记流 φ 的，位于 B 及 A 中的横截线（其中 θ_1 另在图 4.1(b) 内画出），它们都连接 p 与 r_0. 不难如此取 θ_1 与 θ_2，使它们只有两点 r_0,p 公共。于是 $\theta_1\cup\theta_2$ 就是我们所需要的闭横截线。

如果 $\overset{\frown}{p_0q_0}$ 是单边的，则 $\theta_1\cup\theta_2$ 不是横截线，因为其上流的穿过方向将不一致(图 4.1(a) 所画是双边的情况).这时，设 s_0 是 γ 在 q_0 之后又一次与 I 相交的交点。如果 $\overset{\frown}{q_0s_0}$ 是双边的，则可如前证明闭横截线的存在性。如果 $\overset{\frown}{p_0q_0}$ 与 $\overset{\frown}{q_0s_0}$ 都是单边的，则 $\overset{\frown}{p_0q_0s_0}$ 是一双边 J 弧，这里 $J=\{s|s_0\leqslant s\leqslant p_0\}$，因此仍可如前作出闭横截线.证毕。

今设 Γ 是二维流形 M^2 上一条单闭曲线，M_1 与 M_2 是 $M^2-\Gamma$ 的连通分支(如果 Γ 不将 M^2 割开，则 $M_1=M_2$)。易见:

1. 若 Γ 是单边曲线，则 $M_1=M_2$, M_1 只有一条边界曲线。以 $A_x(M_1)$ 表示由 M_1 加上一无限远点 x 而得的紧化流形，则有[1]

$$\chi(A_x(M^2-\Gamma))=\chi(M^2)+1. \tag{1}$$

2. 若 Γ 是双边曲线，且 M_1 与 M_2 不同，则可如前定义 $A_x(M_1)$ 与 $A_y(M_2)$，这时有

$$\chi(A_x(M_1))+\chi(A_y(M_2))=\chi(M^2)+2. \tag{2}$$

3. 若 Γ 是双边曲线，而 $M_1=M_2$，则定义 $A_{xy}(M_1)$ 为 M_1 加上两个不同的无穷远点 x 与 y 而得的紧化流形，这时有

$$\chi(A_{xy}(M^2-\Gamma))=\chi(M^2)+2. \tag{3}$$

1) (1),(2),(3)的证明见引理 2.

引理 2. 设 C 是二维流形M上一条单闭曲线，则有下列结论：

(i) 若 $M=K^2$，而C是双边曲线，且 $M-C$ 为连通集，则 $M-C=\mathring{H}_2$。

(ii) 若 $M=P_3, C$ 为双边且 $M-C$ 为连通，则

$$A_{xy}(M-C)=PR^2.$$

(iii) 若 $M=PR^2, C$ 为双边，则C必包围唯一的圆盘.

(iv) 若 $M=P_3, C$ 为单边，则 $A_x(M-C)$ 为 T^2 或 K^2.

证. (i) 在M上作一连续流 φ，使它只有有限个奇点，且以C为横截线. 设 $A_{xy}(\varphi)$ 是φ在 $A_{xy}(M-C)$ 上导出的流，则

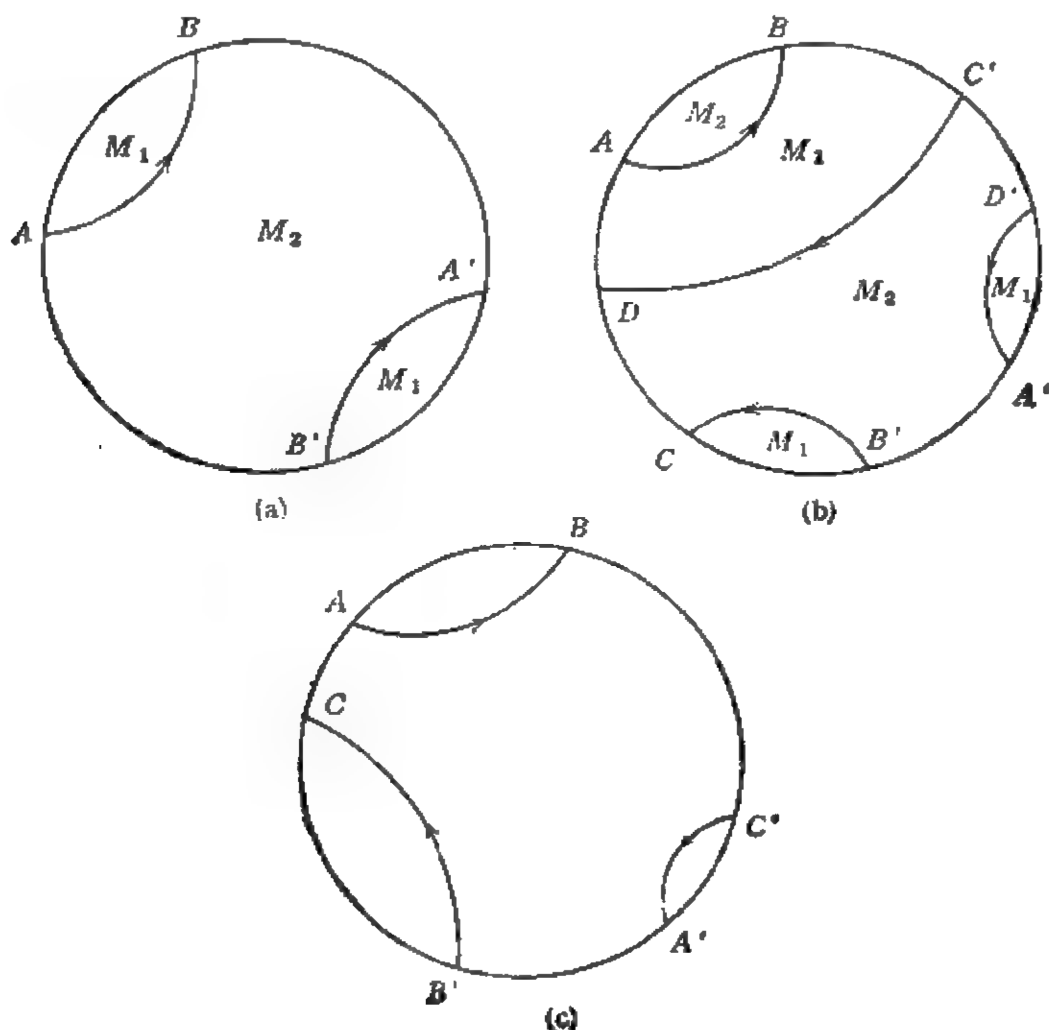


图 4.2

$A_{xy}(\varphi)$ 比 φ 多两个奇点 x, y，各有指标 $+1$。于是有

$$\chi(A_{xy}(M-C)) = \chi(M) + 2 = 2.$$

故 $A_{xy}(M-C)$ 为一球面，从而 $M-C$ 为开柱面 $\mathring{H}_2$。

(ii) 与前面类似

$$\chi(A_{xy}(M-C)) = \chi(P_3) + 2 = 2 - 3 + 2 = 1,$$

故 $A_{xy}(M-C)$ 为射影平面 PR^2。

(iii) 如图 4.2，易见此时 C 不能与半圆周（其上直径相对的点被等同为一点）重合，因为已设 C 为双边曲线。若 C 与圆周有多于一个的交点，则其个数只能是偶数(图 4.2(a),(b))，否则 C 将是单边闭曲线(图 4.2(c))[1)]。这时 $PR^2 - C$ 有两个连通支 M_1 与 M_2。显见 M_1 是圆盘，M_2 是 K^2。若 C 与圆周只有一点公共，或没有公共点，则 C 的内部是圆盘，外部是 Möbius 带（见 §1）。

(iv) 由假设及(1)式有

$$\chi(A_x(M-C)) = \chi(P_3) + 1 = 2 - 3 + 1 = 0,$$

故 $A_x(M-C)$ 是 $-T^2$ 或 K^2。

下面证明：

定理 2 (Markley-Gutierrez)。设 φ 为 K^2 上的连续流，则 φ 的每一 P^+ 或 P^- 稳定轨线 γ 必为周期轨线或奇点，即 K^2 上的连续流不能有非明显的 P^+ 或 P^- 稳定轨线。

证。设 γ 为 K^2 上的 P^+ 稳定轨线，但不是奇点或周期轨线。设 C 是和 γ 相交的横截圆。其存在性由引理 1 知之。因为 γ 有一段弧连接 C 两边的点而不与 C 相遇，故 $K^2 - C$ 为连通集。由引理 2(i) 知 $K^2 - C$ 为一柱面，也就是环域。它的边界圆 C_1 与 C_2 有相反的定向，如图 4.3 所示。这两个圆在 K^2 上借助于一保持定向的同胚等同起来。

今设 p, q, r, s 为 γ 与 C 的四个相继的交点，即 $\overset{\frown}{pqrs}$ 是 γ 上的一段弧。由于 γ 上的 $\overset{\frown}{qr}$，$\overset{\frown}{rs}$ 与 C_1, C_2 上的 $\overset{\frown}{rs}$，$\overset{\frown}{qr}$ 一起

1) 严格证明见 §5。

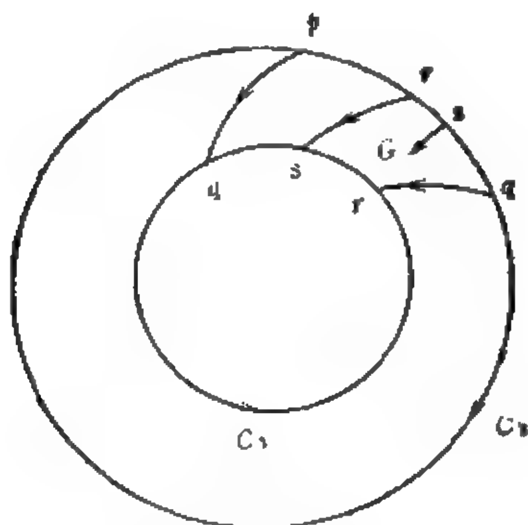


图 4.3

围成一个单连通域 G。γ 从 s 以后应永远保留在 G 中不再跑出来，从而也不可能再任意接近 p 点。这是和 γ 为 P^+ 稳定相矛盾的，证毕。

推论（Kneser 定理）。K^2 上无奇点的连续流必有周期轨线。

证。设 M 是流的一个极小集，它必定存在，且不能是整个 K^2。对 $\gamma \in M$，已知 γ 为 P 式稳定，故由定理 2 和无奇点的假定，即知 γ 为周期轨线。

Peixoto 的[33]中关于闭曲面 M^2 上的 $C^r(r \geqslant 1)$ Morse-Smale 向量场集合 Σ^r 在 Banach 空间 $\mathscr{X}^r(M^2)$（表示 M^2 上所有的 C^r 向量场所成的空间）中为稠密的结论当 $r > 1$ 而 M^2 为不可定向时，除了 PR^2 与 K^2 以外，实际上并未获得证明. [31]中除了前述的定理 2 以外，还证明了：当 $M^2 = P_3 = T^2 \# PR^2$ 时 Peixoto 的结论也是对的。因证明困难，这里从略。

下面讨论柱面 H_2，Möbius 带 B_2 和 Klein 瓶 K^2 上无奇点的连续流的分类问题。这个问题读者可在[3]中找到一些初步的结果，最近[32]改进了[3]中关于 B_2 和 K^2 上的结果，使分类更为精确化。

为了便于后面的叙述，首先引进下列七种标准区域：

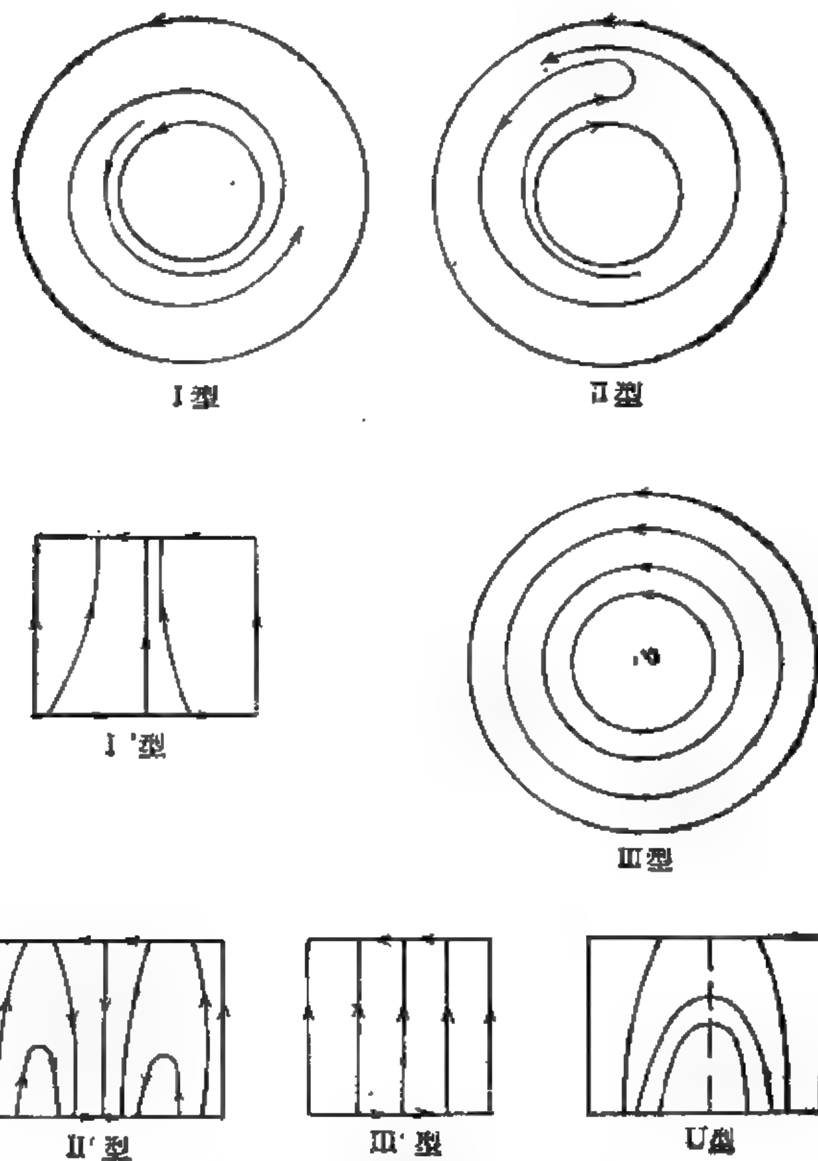


图 4.4

引理 3. 设 φ 是 H_2 上的可定向无奇点连续流，且以 ∂H_2 为轨线。则 H_2 被 φ 的周期轨线划分为若干个标准区域，每一区域必定是 I,II,III 型之一，且 II 类域只能有有限多个，若它有偶(奇)数个，则 H_2 的两边界轨线有相同(相反)的定向。

引理 4. 设 φ 是 B_2 上的可定向无奇点连续流，且以 ∂B_2 为轨线，则 B_2 被 φ 的周期轨线划分为若干个标准区域，每一区域必

定是 I,II,III,I',II',III' 型之一[1],其中 I', II', III' 中的闭轨都是单边曲线,且这三种区域在 B_2 上总共最多只能出现一个。又 II 类型的标准区域最多只能有有限多个。

引理 5. B_2 上的无奇点可定向连续流 φ 至多有一周期轨线能代表 $\pi_1(B_2)$ 的生成元。

以上几个引理都可在[3]中找到,证明从略. 现在介绍[32]的几个定理。

定理 3. B_2 上切于边界的无奇点可定向连续流 φ 恰有一条代表 $\pi_1(B_2)$ 的生成元的闭轨,其它闭轨必定代表 $\pi_1(B_2)$ 的生成元的平方。

证. 由引理 5 知道只须证明 φ 至少有一条能代表 $\pi_1(B_2)$ 的生成元的闭轨即可. 为此, 不妨假设 B_2 全部由 I,II,III 型域所构成,因为 I',II',III' 中都有能代表 $\pi_1(B_2)$ 的生成元的闭轨。又易见此时 B_2 上至少有一个 I 或 III 型域. 否则, 就将出现无数个 II 型域, 这不可能。设此域的边界轨线为 L_1 与 L_2。L_1 与 L_2 同伦, 由引理 5 知道二者都不能代表 $\pi_1(B_2)$ 的生成元。但 B_2 上非零伦的 Jordan 曲线若不代表 $\pi_1(B_2)$ 的生成元, 则必代表 $\pi_1(B_2)$ 的生成元的平方(这事实可以象定理 2 图 4.3 中那样用反证法来证明),故 L_1 与 L_2 属于后一类, 且其中至少有一条异于 B_2 的边界, 设为 L_1。L_1 把 B_2 分割成一个柱面和一个 Möbius 带 B_2'.对 B_2' 进行和前面一样的推理,可知其上又必存在代表 $\pi_1(B_2')$ 的生成元的平方而异于 B_2' 的边界 L_1 的周期轨线 L_1', 它把 B_2' 分割为一个柱面和一个 Möbius 带 B_2''。注意, $\pi_1(B_2)$ 的生成元也是 $\pi_1(B_2')$ 的生成元,其逆亦真。

如此类推,可得一系列渐缩的Möbius带列: $B_2 \supset B_2' \supset B_2'' \supset \cdots$ 应用实变函数论中熟知的超限序列和 Cantor-Baire 定态定理, 即知其极限只能是 B_2 上一条代表 $\pi_1(B_2)$ 的生成元的周期轨线。

---

1) 图 4.4 中的 U 型区域表示不可定向线素场。

推论1. B_2 上每一横截于 ∂B_2 且无不动点的可定向连续流恰有一条代表 $\pi_1(B_2)$ 的生成元的闭轨。

注意：有可能在定理 3 的论证中出现一系列的柱面 $H_3^{(k)}(k=1,2,\cdots)$，而 $B_2-\bigcup_k H_3^{(k)}=l$ 是 $\pi_1(B_2)$ 的生成元。由此可见，B_2 全部由 I,II,III 型域构成是可能的，这一点[32]没有注意到。

引理6. 设 φ 是 K^2 上无奇点的可定向连续流，则 K^2 被 φ 的某些闭轨划分成若干个标准区域(闭轨的存在性由 Kneser 定理知之)。设 L 是 φ 的一条闭轨：

1) 若 L 代表 $\pi_1(K^2)$ 中的元素 $h^{\pm1}$，则标准区域只能是 I,II,III 型的，且至少存在一 II 型域。

2) 若 L 代表 $k^{\pm2}$，则标准区域可能有 I,II,III,I′,II′,III′ 中的任何一种.其中 II 型域最多为有限个，I′,II′,III′ 型域总共最多只有两个。

3) 若 L 代表 $k^{\pm1}h^n$，则必有另一闭轨 L' 与 L 同伦，若此时别无其它闭轨，则 K^2 由一个 I′ 或 II′ 型域构成。

证明见 [3]。

定理4. 若 K^2 上无 $h^{\pm1}$ 类闭轨，则存在唯一的整数 s，使 K^2 上恰有两个 $k^{\pm1}h^s$ 类的闭轨。若 K^2 上还存在其它闭轨，则必为 $k^{\pm2}$ 类的。

证. 由 Kneser 定理及 §1 定理 14，知必存在一闭轨 L，它属于 $k^{\pm2}$ 或 $k^{\pm1}h^n$ 类。若 L 属于 $k^{\pm2}$，则 K^2-L 是两个 Möbius 带 $\mathring{M}_1$ 与 $\mathring{M}_2$。由定理 3 知存在闭轨 $L_i\in\mathring{M}_i$，使 L_i 代表 $\pi_1(M_i)(i=1,2)$，显见 L_i 必属于 $k^{\pm1}h^{n_i}$ 类.故以下总可假设 L 属于 $k^{\pm1}h^n$ 类。这时再用 §1 定理 14 知 K^2-L 同胚于 $\mathring{B}_2$。对这个开 Möbius 带应用定理 3，知道它存在唯一闭轨 L_3 代表 $\pi_1(\mathring{B}_2)$。显见在 K^2 的二重覆盖空间中，L_3 的覆盖闭轨同伦于 L 的覆盖闭轨。因此 L 与 L_3 同类，这就是定理的前半部。

如果除了 L 与 L_3 外，还存在其它闭轨 L^*，则由定理 3，L^*

应属于 $(k^{\pm1}h^r)^2 = k^{\pm2}$ 同伦类[1]，定理证毕。

定理 5. 设 φ 是 K^2 上无奇点的连续流，则 K^2 被 φ 的闭轨分成若干个标准区域. 可以区分为下列四种不同的情况:

1) 只有 I,II,III 三种类型的区域，其中至少有一个属于 II 型(对应于 φ 只有 $h^{\pm1}$ 类闭轨)。

2) 只有一个标准区域，它属于 I′ 型，II′ 型，或 III′ 型(前二者对应于 φ 没有 $h^{\pm2}$ 与 $k^{\pm2}$ 类闭轨，最后一情况表示 K^2 被闭轨所充满)。

3) 恰有两个标准区域，它们或属于 I′ 与 II′ 型，或属于 III′ 型(前者对应于有唯一 $k^{\pm2}$ 闭轨，后者对应于 $k^{\pm2}$ 闭轨充满了一 Möbius 带)。

4) 恰有两个标准区域，属于 I′,II′ 或 III′ 型，另外至少还有一个标准区域属于 I，II 或 III 型。

推论 2. 如果 φ 没有 $h^{\pm1}$ 闭轨，则 K^2 上至少有一个，至多有两个标准区域，属于 I′,II′ 或 III′型。

定理 5 的证明.

1) 当 φ 只有 $h^{\pm1}$ 类闭轨时，可沿此闭轨将 K^2 切开而得一柱面，其上下边界有不同的定向. 于是由引理 3 即得定理的结论。

2) 当 φ 含有 $k^{\pm1}h^s$ 型闭轨时，可沿它将 K^2 切开而得一 Möbius 带，于是由引理 4 即知 K^2 只含一个标准区域，此区域若不含 k^2 型闭轨，则它只能是 I′ 或 II′ 型；若它含有 k^2 型闭轨，则只能是 III′ 型.

3) 沿 φ 的唯一 $k^{\pm2}$ 型闭轨将 K^2 切开，可得两个 Möbius带，由 2)知它们属于 I′ 与 II′ 类中之一。若 $k^{\pm2}$ 型闭轨多于两个，则它们有可能充满一 Möbius 带，因而此带由一个 III′ 型区域构成。

4) K^2 含有至少两条 $k^{\pm2}$ 类闭轨 L_1，L_2，但不属于同一

---

1) 一般可证对整数 m,n,p,q 有:

$$(k^m h^n)(k^p h^q) = k^{m+p} h^{(-1)^p n+q},$$

$$(k^m h^n)^{-1} = k^{-m} h^{(-1)^{m+1} n}.$$

III′ 型区域。此时沿 L_1 切开 K^2 将得两个 Möbius 带 M_1，M_2，而其中之一被 L_2 切开成为一 Möbius 带和一柱面。这时在柱面上必有 I,II 或 III 型区域。

§ 5. 射影平面上的动力系统

射影平面和环面、柱面、Möbius 带最大的不同之处在于它的 Euler 特征等于 1. 从而由 §1 定理 1 知道它上面的任何连续流必有奇点. 在古典文献中作者没有见到过研究射影平面动力系统的. 在近代文献中，除了少数关于一般二维流形动力系统的结论也可适用于射影平面以外，也没有看到过专门研究这一主题的. 因此，从 1981 年开始的陈一元的工作[34],[35],[36]，以及朱德明和韩茂安关于一般二维可定向与不可定向流形上动力系统定性理论的研究工作（详细介绍见 §§9—11）中所导出的、射影平面动力系统的一些较基本的结果，可以被认为是对这方面的初步尝试. 本节将先介绍[34] 中有关射影平面的两个定理和作者本人的一个定理，然后介绍[35],[36]中的部分结果.

首先，由 §4 定理 3 容易导出：

定理 1. 设 φ 是定义在不可定向曲面 M^2 上的连续流. 如果存在一同胚于 Möbius 带的闭区域 $N\subset M^2$，使 φ 在 N 中无奇点，且 N 完全包含 φ 的一条正或负半轨，则 φ 在 M^2 上必有单边闭轨.

推论 1. 设 φ 是 PR^2 上的连续流. 如果 PR^2 上存在一双边闭曲线 L，使 φ 的奇点都位于 L 的同一边，且 L 本身是闭轨或横截线，则在 PR^2 上存在唯一的非零伦单边闭轨.

证. 由 §4 引理 2 iii)知 L 必包围一圆盘 D，因而是零伦闭曲线. 由 §1(6) 式知 $PR^2 - D$ 是一 Möbius 带 B_2. 由假设知 D 中必含 φ 的奇点，从而 B_2 中没有 φ 的奇点，且显见满足定理 1 中 N 所满足的条件，故其中必有单边闭轨 L. 又因 $PR^2 - L$ 同胚于圆盘，故 L 是 PR^2 上的唯一非零伦闭轨.

以上的定理和推论在[37]中得到更一般的推广.

定理2. 设φ为 PR^2 上有唯一初等奇点的连续流，则只有下列两种情况：

1) φ有唯一的非零伦闭轨，整个 PR^2 是一单连通螺域。

2) 除了一非零伦闭轨外φ还至少有一零伦闭轨. PR^2 被φ的闭轨分成一些标准区域，其中有一为单连通螺域，有一为 I′, II′ 或 III′ 型域，其余的区域当且仅当 PR^2 有至少两条零伦闭轨时才存在，且必属于 I, II 或 III 型。

证. 设O是φ的唯一初等奇点，因为它有指标 $+1$，故可容易地作出一条包围O的闭横截线 C，它是双边的. 于是由推论 1 知道φ在 PR^2 上有唯一的非零伦单边闭轨 L。如果L是φ的唯一闭轨，则因 PR^2-L 同胚于圆盘，故在C外部的轨线的 ω(或 α)极限集是 L，每一轨线都是螺线(但O可能是焦点，也可能是结点).

其次，若φ除了单边闭轨L外，还至少有一条双边闭轨 L'，则 L' 应是包围奇点O的. L' 内部若有另一闭轨 L''，则 L'' 必为零伦，且这时 L' 与 L'' 之间的环域属于 I, II 或 III 型。若 L' 内部D无其它闭轨，则必整个为一螺域。又由 §4 定理 3 的证明知此时 $PR^2-D=B_2$ 中除了L外若还有其它闭轨 L^*，则 L^* 必为 $\pi_1(B_2)$的生成元的平方。从而 L^* 应是双边的。由 §4 引理 2 iii) 知道 L^* 也应是零伦的。

下面的定理是著者得到的，未发表过。

定理3. 只有一个奇点，或三个初等奇点的射影平面动力系统(连续流)必有闭或奇闭轨线。

证. 先看只有一个奇点(它必为指标 $+1$) 的 PR^2 上的连续流 φ，不妨假定此奇点B位于确定 PR^2 的圆周上(图 5.1)。我们假定不存在过B的奇闭轨线，然后来证明φ一定存在闭轨线.[1]

由于已设φ不存在奇闭轨线，故圆周L不是奇闭轨[2]。设在L

---

1) 当B为初等奇点时，由 PR^2 上无非明显的P式稳定轨线的事实，立刻可知从B出来的轨线必以单边闭轨为其极限集，除非B是中心点，此时有双边闭轨.

2) 有可能出现：从B出发的一切轨线都进入 B，且L是奇闭轨。这时 $B=B'$ 处有一个椭圆域和一个双曲域，指标仍为 $+1$。PR^2 上只有奇闭轨而无闭轨.

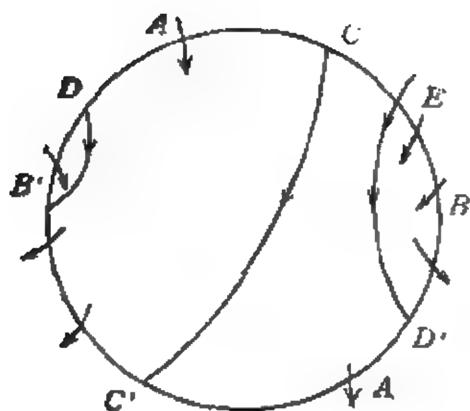


图 5.1

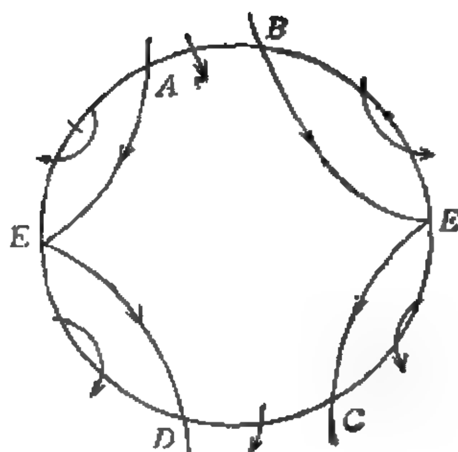


图 5.2

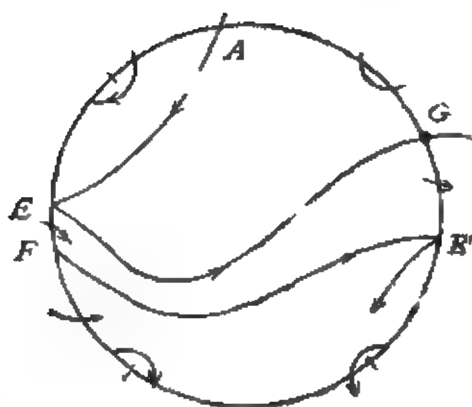


图 5.3

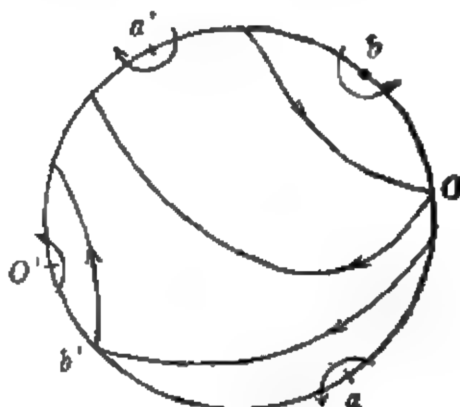


图 5.4

上的A点轨线正向是指向圆内部的，则在A的直径相对点 A' 处轨线的正向是指向圆外部的。当A沿着开半圆周 $\overset{\frown}{BAB'}$ 移动时，φ的轨线正向都应指向圆内，因为此半圆周上没有奇点。从而在开半圆周 $\overset{\frown}{BA'B'}$ 上φ的轨线的正向都应指向圆外。这时，如果没有轨线进入和离开 B，则φ的轨线确定 $\overset{\frown}{B'AB}\to\overset{\frown}{BA'B'}$ 到它自己的一个反向自同胚，它的不动点 $C\to C'$ 就决定了一条闭轨，它显然是单边曲线，又B是中心或焦点。如果有轨线 $\overset{\frown}{DB'}$ 进入 B'，

又 $\overset{\frown}{ED'}$ 进入 D'，则φ确定 $\overset{\frown}{DAE}$ 到 $\overset{\frown}{B'A'D'}$ 的一个同胚[1)]，前者包含在后者之中，且为反向，故也必有一不动点 C，它确定一条闭轨 $\overset{\frown}{CC'}$、又这时 $B=B'$ 是稳定结点。

当φ有三个初等奇点时，仍可假设它们都在确定 PR^2 的圆周上。因若不然，我们总可经过这三点作一圆弧，然后通过射影变换把此圆变成 PR^2 的"边界圆"。现在三奇点都是初等的，故其中有两个指标为 $+1$，一个是指标为 -1 的鞍点 E。经过 E和它的直径相对点 E' 的四条分界线在 PR^2 上有几种不同的相对位置。考虑到对称性，可以画出如图 5.2,5.3 两种图形。在图 5.2 中，$\overset{\frown}{AB}$ 被映到$\overset{\frown}{DC}$，其中必含有一段子弧的反向自同胚，因而必有不动点。这时另二指标 $+1$ 的奇点分别位于 $\overset{\frown}{AE}$ 和 $\overset{\frown}{ED}$ 上。在图5.3 中 $\overset{\frown}{EF}$ 被映到 $\overset{\frown}{GE'}$，其中亦必含有一段子弧的反向自同胚，故必有不动点。这时另二指标 $+1$ 的奇点分别位于 $\overset{\frown}{EA}$ 和 $\overset{\frown}{AG}$ 上。证毕。

但当初等奇点多于三个，或三个奇点中有非初等奇点时，要用上面的方法就有困难。首先，我们不一定能假定奇点都在圆周L上。其次，即使只有三个奇点，如图 5.4，但其中O与b是指标为零的奇点，a是指标为 $+1$ 的奇点。易见此时没有由一段弧构成的单边闭轨。要证明有多于三个非初等奇点时 PR^2 上闭轨的存在性，需要用到推广的 Poincaré-Bendixson 环域定理，证明见 §9。

以单位圆内部和圆周(其上直径相对的点等同为一点)来定义 PR^2 时，圆周上不一定有奇点。例如，若视

---

1) 不妨设 $D\neq B$，且 $\overset{\frown}{DB'}$ 是进入 B' 的轨线中最右边的一条。因若 $D=B$，则 $\overset{\frown}{BB'}$ 便是一条奇闭轨线。

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x \tag{1}$$

为 PR^2 上的动力系统，则它有一系闭轨线

$$0 < x^2 + y^2 = \alpha < 1,$$

它们都是双边闭轨。(0, 0) 是中心，且为唯一的指标 $+1$ 的奇点. $x^2 + y^2 = 1$ 的任何半圆周都是 PR^2 上的单边闭曲线。一般，在[35]中证明了:

定理 4. 由圆周及其内部所定义的射影平面，其上动力系统的闭轨线只有四种：1) 全部位于单位圆中同伦于零的双边闭轨，2) 和边界圆完全重合的单边闭轨，3) 被边界圆分为奇数段的单边闭轨，4) 被边界圆分为偶数段的双边闭轨。

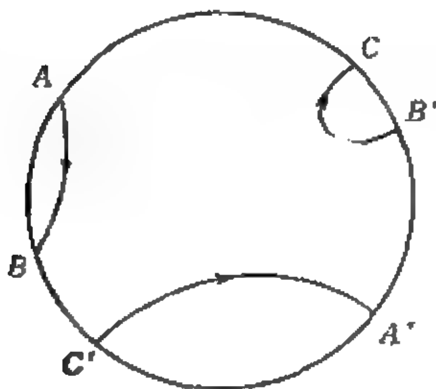


图 5.5

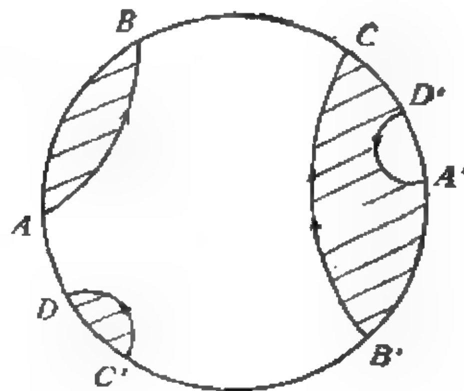


图 5.6

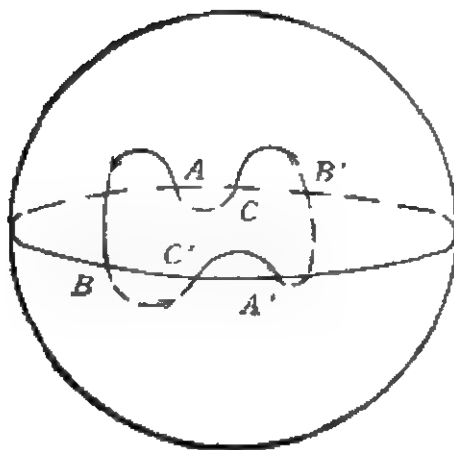


图 5.7

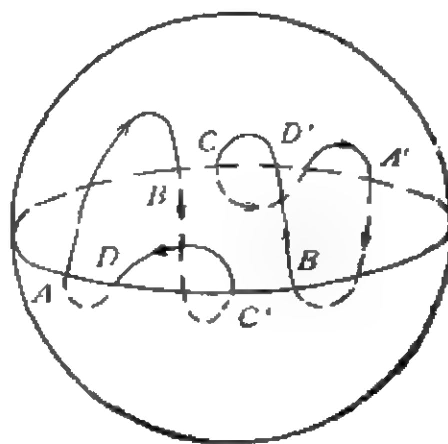


图 5.8

证. 1),2) 是显然的. 要证明 3) 是单边闭轨, 4) 是双边闭轨,只须证明前者不把射影平面分成两个区域,而后者把射影平面分成两个区域. 为此,考察图 5.5 (有闭轨 $ABB'CC'A'$)与图 5.6 (有闭轨 $ABB'CC'DD'A'$),以及它们在球面 S^2 上的提升,图 5.7 与图 5.8. 球面是射影平面的二重覆盖空间. 由图 5.5 的有三段 (有奇数段也是一样) 的闭轨提升到 S^2 上得到图 5.7 中的曲线 $\widehat{ABC'A'}$,其中 $\widehat{BC'}$ 由原来轨线段 $\widehat{B'C}$ 关于球心的对称点所构成. 显见 $A' \neq A$(A' 是 S^2 上与 A 直径相对的点), 故 $\widehat{ABC'A'}$ 在 S^2 上不是闭曲线, $S^2 - \widehat{ABC'A'}$ 是一连通集, 从而 $PR^2 - \widehat{AB} - \widehat{B'C} - \widehat{C'A'}$ 也是一个连通集.

反之,由图 5.6 中有四段(有偶数段也是一样) 的闭轨提升到 S^2 上得到图 5.8 中的闭曲线 $\widehat{ABC'DA}$ 与 $\widehat{A'B'CD'A}$,每一条都是 S^2 上的双边闭曲线,且各把 S^2 分为两个连通支;从而 $PR^2 - \widehat{AB} - \widehat{B'C} - \widehat{C'D} - \widehat{D'A'}$ 也把 PR^2 分为两个连通支. 证毕.

对二维流形上的闭轨,即使是单边的,我们也能和平面上一样定义极限环,周期环和复合极限环. 但容易看出,若一单边闭轨是极限环,则它或为稳定,或为不稳定, 不可能是半稳定环. 又若 L 是 PR^2 上连续流的一条单边闭轨, 则流不可能有第二条单边闭轨,从而 L 只能是极限环.

为了进一步研究射影平面上判别极限环的存在准则, 我们再采取第二种定义 PR^2 及其上连续流的方法. 如所熟知, PR^2 可以通过把正方形的对边扭转叠合而得到. 此外, 为使其上定义的流为光滑动力系统,则在边界上叠合(或等同)的点处,向量场的方向还必须一致. 因此,若考虑定义在正方形 $[0,a] \times [0,a]$ 上的微分方程

$$\dot{x} = P(x,y), \dot{y} = Q(x,y), \tag{2}$$

且把边界点 $(0,y)$ 与 $(a,a-y)$ 等同, $(x,0)$ 与 $(a-x,a)$等

同,则除了保证解的存在唯一性条件(如 $P,Q\in C^1$)以外，还应假设[1]

$$
\begin{aligned}
&P(0,y)=P(a,a-y),P(x,0)=-P(a-x,a),\\
&Q(0,y)=-Q(a,a-y),Q(x,0)=Q(a-x,a).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

采用这种定义方法有一个缺点,即$(0,0)$与 (a,a) (它们等同为一点)须是奇点,因为

$$
\begin{aligned}
&P(0,0)=P(a,a)=-P(a,a),\ \text{从而}\ P(0,0)=0;\\
&Q(0,0)=-Q(a,a)=Q(a,a),\ \text{从而}\ Q(0,0)=0.
\end{aligned}
\tag{3'}
$$

同理可证 $(0,a)$ 与 $(a,0)$ (它们也等同为一点)也应是奇点。除此以外,在正方形的其它地方当然还可能有别的奇点。显见,借助于单位圆来定义的 PR^2 上的动力系统可以只有一个奇点。最简单的例子见(1)式。

现在再把方程(2)拓广到 $[-a,a]\times[-a,a]$ 中，并使之保持连续。首先,在 $[-a,0]\times[0,a]$ 中定义(2)的延拓方程为

$$\dot{x}=P(a+x,a-y),\ \dot{y}=-Q(a+x,a-y),\tag{4}$$

则对 y 轴上一点 $M(0,y),y\leqslant a$, 方程(4) 的右方在此点的值为$(P(a,a-y),-Q(a,a-y))$。由(3)式知它等于$(P(0,y),Q(0,y))$。这表示两向量场在正方形的公共边 $0\times[0,a]$上是一致的。统记由(2)与(4)在 $[-a,a]\times[0,a]$ 上所确定的向量场为:

$$\dot{x}=P_1(x,y),\dot{y}=Q_1(x,y).\tag{5}$$

今再定义(5)在 $[-a,a]\times[-a,0]$ 中的延拓方程为:

$$\dot{x}=-P_1(-x,-y),\ \dot{y}=-Q_1(-x,-y).\tag{6}$$

不难证明方程(5)与(6)已将(2)延拓成为 $[-a,a]\times[-a,a]$ 中的光滑向量场了，并且易证在扩大正方形的对边上有:

$$
\begin{aligned}
(-P_1(a,-y),-Q_1(a,-y))&=(-P(a,-y),\\
&\quad -Q(a,-y))=(-P(0,a+y),Q(0,a+y)),
\end{aligned}
$$

1) 用单位圆来定义 PR^2 及其上的光滑向量场时则应设: $P(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta+Q(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta=P(-\cos\theta,-\sin\theta)\cos\theta+Q(-\cos\theta,-\sin\theta)\sin\theta$, $Q(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta-P(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta=-\theta(-\cos\theta,-\sin\theta)\cos\theta+P(-\cos\theta,-\sin\theta)\sin\theta$。其证明见[35]。

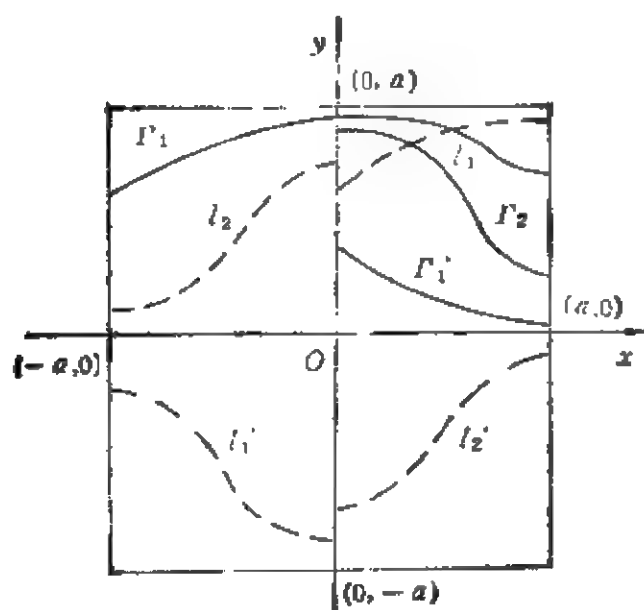


图 5.9

$$(-P_1(-x,a),-Q_1(-x,a)) = (-P(-x,a),-Q(-x,a))$$
$$= (P(a+x,0),-Q(a+x,0)).$$

以上事实说明(5),(6)在 $[-a,a]\times[-a,a]$ 中所确定的向量场可视为环面上的向量场看待，如果把这正方形的对边叠合的话。又对方程(2)在 $[0,a]\times[0,a]$ 中的一条轨线 l_1，把它向左平移距离 a，再关于直线 $y=\frac{a}{2}$ 作对称，即得(5)在$[-a,0]\times[0,a]$ 中的一条轨线 l_2。然后把 l_1,l_2 关于原点作对称，即得(6)的两条轨线 l_1',l_2'。特别地，若 l_1 是 PR^2 上的方程(2)的闭轨线，则 l_1 与 l_2 相接，l_1' 与 l_2' 相接而成为环面上的两条闭轨线。

反之，对于环面上一条横向闭轨 $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ (图5.9)，可以把它的左半段 Γ_1 向右平移距离 a，再关于 $y=\frac{a}{2}$ 对称，得到 Γ_1'，则 $\Gamma_1'\cup\Gamma_2$ 构成 PR^2 上一条闭轨，它由两段组成。

类似于平面定性理论中的环域定理，现在可以建立判别 PR^2 上闭轨线存在的法则。在以下三定理中都假设 y 轴上的线段 $0\leqslant y\leqslant a$ 是动力系统(2)的无切弧。

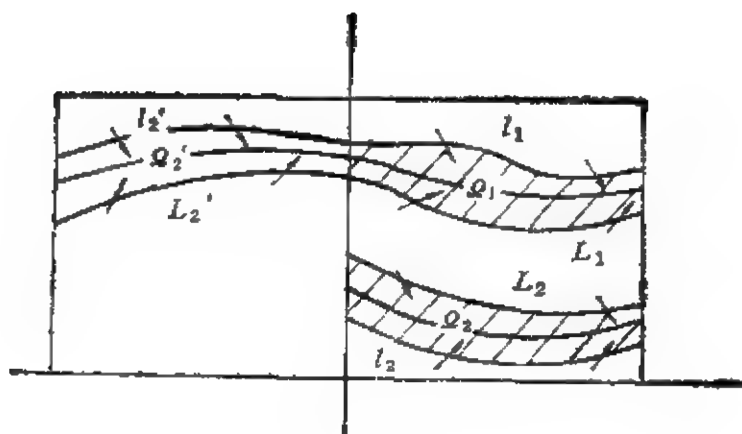


图 5.10

定理5. 设 $l=l_1\cup l_2$ 和 $L=L_1\cup L_2$ 是 PR^2 上两条不相交的闭曲线(图 5.10)，它们所包围的区域 Ω 中不含奇点. 又设方程(2)的轨线与 l, L 相交时都从 Ω 外部进入内部. 则(2)在 Ω 中至少有一条外侧稳定环 Γ_1 和一条内侧稳定环 Γ_2，它们可能重合成为一条双侧稳定环 Γ.

证. 如图 5.10，把方程(2)拓广成为 $[-a,a]\times[0,a]$ 中的方程(5). 则对应于 l_2 和 L_2 在 $[-a,0]\times[0,a]$ 中有 l_2' 和 L_2'. l_2' 与 l_1 连接，L_2' 与 L_1 连接，分别成为环面上的两条闭曲线，(5)的轨线和它们相交的都进入区域 $\Omega'=\Omega_1\cup\Omega_2'$. 由于 Ω' 拓扑等价于一平面环域，故定理得证. 图 5.10 中画的是 $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma$ 的情况.

定义 1. 一族只有两端点在 $[0,a]\times[0,a]$ 边界上的轨线段称为是左右定向的，如果其中每一段轨线的终点都在其起点的

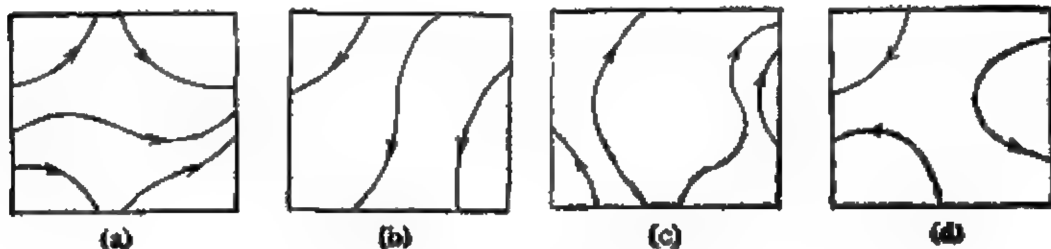


图 5.11

右方．类似地可以定义右左定向，上下定向或下上定向的轨线段族．

例 1. 图 5.11 中的 (a),(b),(c) 都是定向轨线段族；但(d)中的轨线段族无法定向．

现在可以证明下一有趣的：

定理 6. 若一射影平面上的闭轨线 Γ 由正方形中若干可定向轨线段所成之族 L 构成，则此族中最多只含两段轨线．

证. 只须证明 L 是左右定向的情况好了，其它三种情况是一样的．

首先证明 L 中只能有有限段的轨线．否则，可以把 L 中的轨线段按时间的先后排列成序：$l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots$，它们一起构成闭轨 Γ．由于 Γ 的周期 T 是有限值，故当 $n\to\infty$ 时 l_n 上运动的时间趋于零．但(2)中的 $P(x,y), Q(x,y)$ 在任一 l_i 上为有界，故 l_n 的长度趋于零，即缩为一点 M．M 应是 Γ 上的奇点，这不可能，故 L 中只含有限段轨线．

任何起点与终点都在正方形边界上的轨线段总把正方形分成两部分，称它们为这轨线段的两侧．于是在 L 中必存在一轨线段，

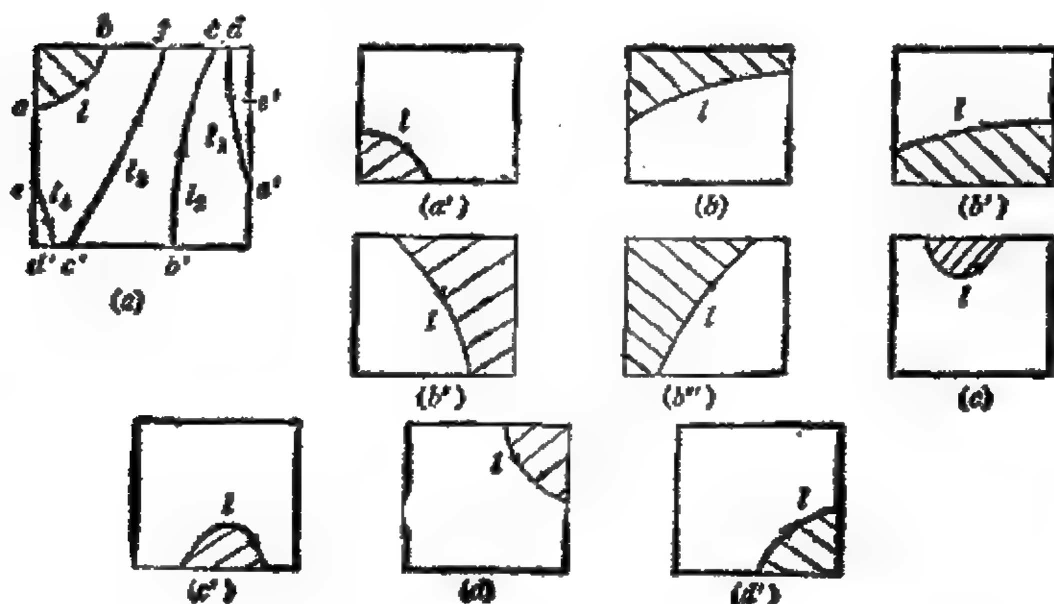


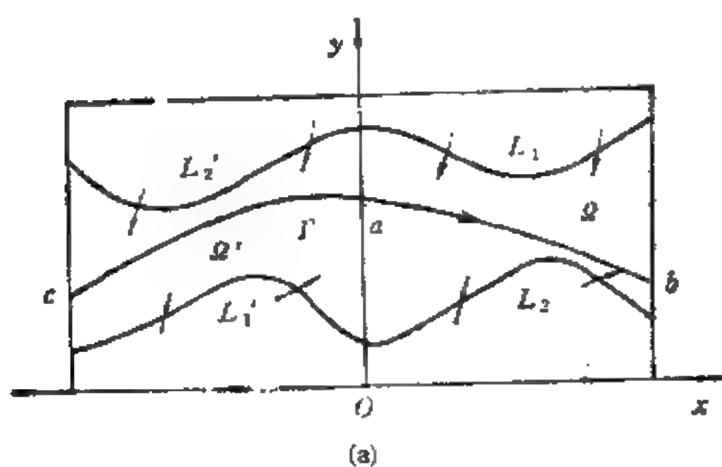
图 5.12

使它的某一侧不含 L 中的其它轨线段．假设这段轨线是 l．l 的可能位置有 10 种(图 5.12)，其中阴影部分表示不含 L 中其它轨线段的那一侧．这 10 种情况又可分为 3 组，从拓扑观点来看，同一组的几个图形其实是一样的．

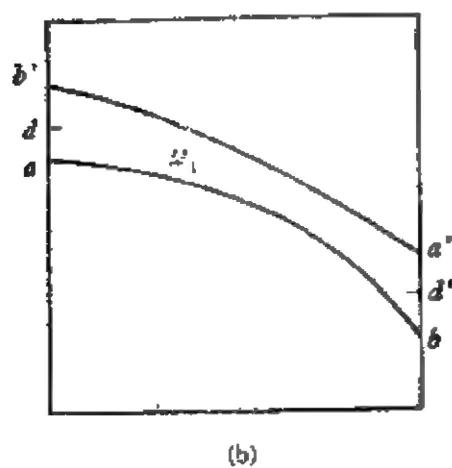
现在仅就第一组的图(a)来证明定理．由于 L 构成闭轨 Γ，故其中必存在轨线段 $l_1=\overset{\frown}{da'}$，$l_2=\overset{\frown}{b'c}$，其中 a',b' 分别是 a，b 的等同点．l_1 不能在 l_2 的上方，否则，l_2 的终点 c 将位于 a' 的下方直边上，或位于 b' 的右方横边上．但这时 c 的等同点将落在阴影区域的边界上，从而其中将出现 L 的弧段，与假设矛盾．同理，l_2 不能在 l_1 上方．由于 L 是左右定向的，故 l_1 与 l_2 的相对位置只能是图(a)所示的那样．于是 L 中还存在 $l_3=\overset{\frown}{c'f}$ 和 $l_4=\overset{\frown}{ed'}$，其中 c'，d' 分别为 c，d 的等同点．注意 e 的等同点 e' 在 l_1 右侧，而 L 在 f 之后的弧段将永远位于 l_2 与 l_3 之间，因而不可能回到 e' 而构成闭轨．因此图(a)不可能出现．不难看出 L 可以由一段弧 $\overset{\frown}{aa'}$ 构成，也可以由两段弧 $\overset{\frown}{ab}$ 与 $\overset{\frown}{b'a'}$ 构成．

定理 7. 设 L 是由两段左右定向的弧段构成的 PR^2 上的闭曲线，其内部 Ω 中不含奇点．又方程(2)的轨线都从 Ω 外部穿进内部．则在 Ω 中必有由一段弧构成的方程(2)的闭轨线．

证． 先看 L 的两条弧都起于左边界而终于右边界的情况(图 5.13(a))．与定理 6 的证明类似，可证在环域 $\Omega+\Omega'$ 中至少存在方程(5)的一条闭轨 $\Gamma:\overset{\frown}{cab}$．如果在第一象限的正方形中 a 等同于 b，则 $\overset{\frown}{ab}$ 便是所求的闭轨．否则，与 $\overset{\frown}{ca}$ 对应，在第一象限有方程(2)的轨线 $\overset{\frown}{b'a'}$，它与 $\overset{\frown}{ab}$ 一起构成(2)的闭轨．由于 a，b 分别等同于 a',b'，且两弧所围的区域 Ω_1 中无奇点，故(2)的轨线确定线段 $\overline{ab'}=\overline{a'b}$ 到它自己的一个反向自同胚．故至少存



(a)



(b)

图 5.13

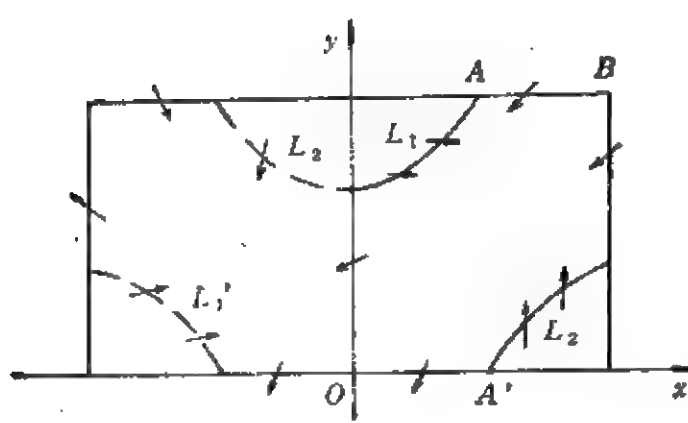


图 5.14

在一个不动点 $d=d'$，连接 d 与 d' 的轨线就是所求的闭轨（图 5.13(b)）。

其次看 L_1 起于第一象限正方形的左边界而终于其上边界，L_2 起于它的下边界而终于其右边界的情况(图 5.14)。这时用前面的方法就造不出所需的环域。因为，例如在正方形的上边 $\overline{AB}$ 段轨线自上而下穿进来，则由(3)式知道在正方形的下边界 $\overline{OA'}$ 段上轨线应自上而下穿出去。所以自 $[-a,a]\times[0,a]$ 中除去 $L_1\cup L_2'$ 上方区域和 L_2 及 L_1' 的下方区域以后得不到我们所需要的环域。但这时 $L_1\cup L_2$ 将射影平面分成两个区域，每一个区域中都有奇点，与假设相矛盾。定理证毕。

对于在 PR^2 上的动力系统也有类似于平面定性理论中的 Dulac 定理(判别闭或奇闭轨线不存在的法则)：

定理 8. 设 G 为 PR^2 上一个区域，若方程(2)的发散量 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$ 在 G 中保持常号，且 G 中使 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$ 的点的集合不含任何二维区域，则方程(2)在 G 内部不存在由偶数个线段所构成的闭或奇闭轨线。

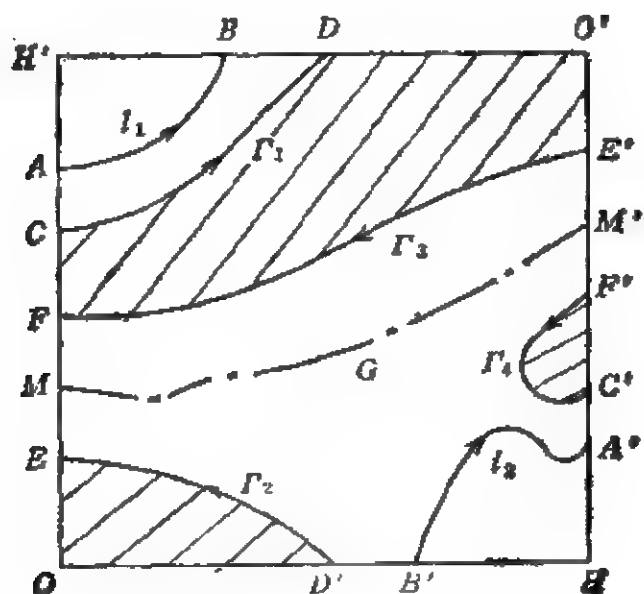


图 5.15

证明可用 Green 公式，与平面情况类似，从略。但这里应注意：由定理 4 知 G 的边界必为由偶数段曲线弧所构成的射影平面上的闭曲线 l。由于 PR^2 本身是紧曲面，它被 l 分成两个连通支时，究竟那个是 l 的外部，那个是 l 的内部，必须先固定 l 上的起点和走向才能确定。如图 5.15，l 由 l_1 与 l_2 两段构成。今在其上固定一个正方向，用箭头表示，并且规定 A 是 l 的起点。于是 $\overset{\frown}{AB}=l_1$ 是第一段，$\overset{\frown}{B'A'}=l_2$ 是第二段。以 G 记沿 l_1 正向前进时位于它右侧，沿 l_2 正向前进时位于它左侧的区域，并称它为 l 的内部，则 PR^2-G-l 便称为 l 的外部。但若改以 B' 为起点而走向不变，则 l 的外部与内部便对换了。

又应注意：定理 8 肯定 G 中不存在由 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 和 Γ_4 构成的闭轨。这是因为：如果存在这种闭轨，则它们应包围一个 G 的子区域(阴影部分)，对它可以应用 Green 公式而导出矛盾。但要否定由奇数段弧所构成的闭轨，如 $\widehat{MM'}$，则不可能。从理论上看，只要假定 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$ 在整个 PR^2 上保持常号而不恒等于零，便可如前导出矛盾。但是我们有(见[36])：

定理 9.

$$\iint_{PR^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=0. \tag{7}$$

证. 如图 5.15，上式左边的积分应等于

$$\begin{aligned}
&-\int_{\overrightarrow{OH}}Q\,dx+\int_{\overrightarrow{HO'}}P\,dy-\int_{\overrightarrow{O'H'}}Q\,dx+\int_{\overrightarrow{H'O}}P\,dy\\
&=-\left[\int_0^a Q(x,0)dx+\int_a^0 Q(x,a)dx\right]\\
&\quad+\int_0^a P(a,y)dy+\int_a^0 P(0,y)dy\\
&=-\int_0^a[Q(x,0)-Q(a-x,a)]dx\\
&\quad+\int_a^0[P(0,y)-P(a,a-y)]dy
\end{aligned}$$

$= 0,$

这由(3)式可知。

由此可见要 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$ 在整个 PR^2 上保持常号是不可能的，除非它几乎处处为零；然后由连续性知必恒等于零。又若希望图 5.15 中由 $l=l_1\cup l_2$ 所围的区域 G 中不存在单边闭轨 $\widehat{MM'}$，则在应用 Green 公式时要考虑 P,Q 沿 l_1,l_2 的第二型线积分，一般来说，这也是难以确定其值的。

定理 10. 设 G 是 PR^2 中一区域，$B(x,y)$ 是 G 中的单值连续可微函数，使 $\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)$ 在 G 中保持常号，且使它为零的点不构成二维集合，则方程(2)在 G 内不存在由偶数个弧段所构成的双边闭或奇闭轨线。

定理 11. 设 $F(x,y)=C$ 是一曲线族，$F\in C^1$，又在 PR^2 上的区域 G 中 $P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}$ 保持常号，且使

$$P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

的点集中不含方程(2)的整条闭轨线。则在 G 中不存在(2)的整条闭轨或只含一个奇点的奇闭轨。

以上两定理的证明与平面上一样，故从略。

例 2. 研究定义在 $[0,\pi]\times[0,\pi]$ 中的方程组：

$$\frac{dx}{dt}=A\sin 2x+B\sin y,\quad \frac{dy}{dt}=C\sin 4y. \tag{8}$$

显见方程右端的函数满足条件(3)，故(8)为 PR^2 上的动力系统。今设 A,B,C 满足条件 $\left|\frac{B}{\sqrt{2}A}\right|>1, C\neq 0$。取 $F(x,y)=\cos 4y$，它也满足条件(3)。容易算出

$$P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}=-4C\sin^2 4y. \tag{9}$$

故由定理 11 知道方程(8)除了可能有含在(9)式等于零的轨迹中的闭轨以外，不存在任何其它闭轨线。又易验证 $y=\frac{3}{4}\pi$ 和 $y=\frac{\pi}{4}$ 两线段一起构成(8)的双边闭轨 l_1，$y=\frac{\pi}{2}$ 是(8)的单边闭轨 l_2，但 $y=0$ 不是(8)的奇闭轨. $y=0$ 与 l_1,l_2 一起组成(9)的零点轨迹.

在[34]中还研究了 PR^2 上的多项式系统，得到:

定理 12. 满足条件(3)的方程(2)若为多项式系统，则必具有形式:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x(x-a)A(2x-a,2y-a) \\
&\quad + y(y-a)B(2x-a,2y-a), \\
\frac{dy}{dt} &= x(x-a)C(2x-a,2y-a) \\
&\quad + y(y-a)D(2x-a,2y-a),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

其中 $A(\cdot,\cdot)$, $D(\cdot,\cdot)$ 是 $2x-a$, $2y-a$ 的奇次多项式，$B(\cdot,\cdot)$, $C(\cdot,\cdot)$ 是 $2x-a$, $2y-a$ 的偶次多项式[1].

证. 我们只须证明: 当方程 (2) 中的 $P(x,y)$ 是满足条件(3)的多项式时，必具有(10)的第一方程右边的形式。对 $Q(x,y)$ 的证明是一样的。由(3′)已知 $P(0,0)=0$，故 $P(x,y)$ 无常数项。于是可写

$$P(x,y)=xA_0(x)+yB_0(y)+xyE_0(x,y).$$

又因 $P(0,y)=yB_0(y)$，且 $P(0,a)=0$，故 $B_0(y)$ 有因式 $y-a$。类似可知 $A_0(x)$ 有因式 $x-a$。于是可写

$$P(x,y)=x(x-a)A_1(x)+y(y-a)B_1(y)+xyE_0(x,y). \tag{11}$$

1) 注意: 一般而论，$[0,a]\times[0,a]$ 中的多项式系统仅为 C^1 系统，因为 P, Q 仅在边界上满足连续性条件(3)，在[35]中还讨论了射影平面上的 C^r 系统和解析系统。

现在注意(3)中有条件 $P(0,y)=P(a,a-y)$，以(11)式代入，可得

$$y(y-a)B_1(y)=y(y-a)B_1(a-y)+a(a-y)E_0(a,a-y),$$

故知 $E_0(a,a-y)$ 中含有因子 y，知 $E_0(a,a)=0$。

换言之，$E_0(x,y)$ 可表为 $E_1(a-x,a-y)$ 的形式，但不含常数项。代入(11)得

$$P(x,y)=x(x-a)A_2(x,y)+y(y-a)B_2(x,y), \quad (12)$$

其中 $A_2(\cdot,\cdot)$，$B_2(\cdot,\cdot)$ 应满足条件：

$$A_2(x,0)=-A_2(a-x,a),\ B_2(0,y)=B_2(a,a-y). \quad (13)$$

进一步的讨论需要用到下一引理，证明从略。

引理. 1) 满足条件 $F\left(-\frac{a}{2},-v\right)=F\left(\frac{a}{2},v\right)$，$|v|\leqslant\frac{a}{2}$ 的多项式必具 $M(u,v)+\left(u+\frac{a}{2}\right)\left(u-\frac{a}{2}\right)N(u,v)$ 的形式，其中 M,N 分别为 u,v 的偶次与奇次多项式。

2) 满足条件 $F\left(-u,-\frac{a}{2}\right)=-F\left(u,\frac{a}{2}\right)$，$|u|\leqslant\frac{a}{2}$ 的多项式必具 $R(u,v)+\left(v+\frac{a}{2}\right)\left(v-\frac{a}{2}\right)S(u,v)$ 的形式，其中 S,R 分别为 u,v 的偶次和奇次多项式。

最后，对(13)中的第一个等式应用引理的后半部，对其中的第二个等式应用引理的前半部，代入(12)式，即知 $P(x,y)$ 应具(10)中的形式[1]，证毕。

对于借助单位圆来定义的 PR^2 上的多项式系统，[36]中还证明了如下的定理：

定理 13. 方程(2)若为由单位圆定义的 PR^2 上的 n 次多项式系统，则它必具形式：

---

1) 令 $x=u+\frac{a}{2}$，$y=v+\frac{a}{2}$.

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{1\leqslant k+h\leqslant n} a_{kh}x^k y^h + (1 - x^2 - y^2)G(x,y),$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{1\leqslant k+h\leqslant n} (-1)^{k+h} a_{kh} x^{k+(-1)^{k+h+1}} y^{h+(-1)^{k+h}} + (1 - x^2 - y^2)H(x,y), \tag{14}$$

其中 k, h 的取值要保证不出现负幂，$G(x,y), H(x,y)$ 是任意的 $n-2$ 次多项式。

例 3. 在熟知的二次系统的标准形式之下(见 [38]§12)，射影平面上的二次系统必具形式：

$$\frac{dx}{dt} = -y + lx^2 + mxy + C_1(1 - x^2 - y^2),$$
$$\frac{dy}{dt} = x + lxy + my^2 + C_2(1 - x^2 - y^2). \tag{15}$$

注意：方程(15)只在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 及其内部定义，且在单位圆上退化为：

$$\frac{dx}{dt} = -y + lx^2 + mxy,\quad \frac{dy}{dt} = x + lxy + my^2. \tag{16}$$

此方程的二次项部分满足条件 $yP_2(x, y) = xQ_2(x, y)$。当化到 Poincaré 半球面时(16)不以赤道为轨线。

要把在单位圆及其内部定义的 PR^2 动力系统延拓到含一个无限远点的全平面(即拓扑球面)，可借助于反演变换. 为此，定义：

$$\overline{P}(x,y) = \begin{cases} P(x,y), & \text{当 } x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ 时}, \\ (x^2 - y^2)P\left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \\ \quad + 2xyQ\left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right), & \text{当 } x^2 + y^2 > 1 \text{ 时}; \end{cases} \tag{17}$$

$$\overline{Q}(x,y) = \begin{cases} Q(x,y), & \text{当 } x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ 时}, \\ 2xyP\left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^3}\right) \\ \quad +(y^2-x^2)Q\left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right), & \text{当 } x^2 + y^2 > 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

则可证 $\bar{P},\bar{Q}$ 在全平面上连续；当 $P,Q\in C^1$ 时也有 $\bar{P},\bar{Q}\in C^1$.事实上，方程

$$\frac{dx}{dt}=\bar{P}(x,y),\ \frac{dy}{dt}=\bar{Q}(x,y) \tag{18}$$

在单位圆外的部分可借其单位圆内部分由反演变换:

$$x_1=\frac{-x}{x^2+y^2},\quad y_1=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

而得到。因此有:

定理 14. 方程(2)的不通过原点，且为单边的闭轨线确定方程(18)的一条闭轨线，且稳定性相同。方程(2)的不通过原点，且为双边的闭轨线确定方程(18)的两条闭轨线，且稳定性相同(参见图 5.5—5.8)。

定理 15. 设 $V(x,y)=C$ 是方程(2) 的一个连续首次积分(定义在单位圆及其内部)，且满足

$$V(\cos\theta,\sin\theta)=V(-\cos\theta,-\sin\theta),\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

则(2)在 PR^2 上不存在极限环。

证. 把(2)按(17)式延拓为(18)，则相应地有

$$\bar{V}(x,y)=\begin{cases}V(x,y), & \text{当}\ x^2+y^2\leqslant 1\ \text{时};\\ V\left(\dfrac{-x}{x^2+y^2},\ \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right), & \text{当}\ x^2+y^2>1\ \text{时}.\end{cases}$$

$\bar{V}(x,y)$ 是(18)的连续首次积分。由平面定性理论知(18)无极限环，从而(2)在 PR^2 上无极限环。

此外，[35]还讨论了射影平面上含参数方程的 Hopf 分支问题。

除了以上介绍的陈一元的工作以外，另一个值得注意的动向是 1981 年 M. I. T. Camacho[39] 研究了 R^3 中的二次齐次向量场

$$Q(x)=(Q_1(x),Q_2(x),Q_3(x)),x\in R^3, \tag{19}$$

在单位球面 S^2 上所导出的切向量场 Q_T:

$$Q_T(x)=Q(x)-(x_1Q_1(x)+x_2Q_2(x)$$

$$+ x_3 Q_3(x)) \cdot x, x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \qquad (20)$$

的性质，并证明若 Q_T 为无极限环的 MS 系统，则其相图只有七种不同的拓扑结构。 后来吴葵光[40]改进了 [39] 的结果，证明当 Q_T 为无极限环的 MS 系统时，其相图至少有十种不同的拓扑结构，同时又得到 Q_T 的更多的一般定性性质。

我们认为值得注意的是：按照他们的论证，将 Q_T 投影到 R_3 中三个平面

$$\pi_j = \{x \in R^3 | x_j = 1\} \qquad (j = 1, 2, 3)$$

上可得三个向量场：

$$\begin{cases} W_Q(x) = (x_1 Q_3(x) - Q_1(x), x_2 Q_3(x) \\ \qquad - Q_2(x), 0), x = (x_1, x_2, 1), \\ R_Q(x) = (0, x_2 Q_1(x) - Q_2(x), x_3 Q_1(x) \\ \qquad - Q_3(x)), x = (1, x_2, x_3), \\ S_Q(x) = (x_1 Q_2(x) - Q_1(x), 0, x_3 Q_2(x) \\ \qquad - Q_3(x)), x = (x_1, 1, x_3). \end{cases} \qquad (21)$$

由此可见：

1. 若 $Q_3(x) = 0$，则 $W_Q(x) = (-Q_1(x), -Q_2(x), 0)$，其中 $x = (x_1, x_2, 1)$。因此，平面二次系统实际上是 Q_T 的一个十分特殊的情况在 (x_1, x_2)平面上的投影。这样就不难理解为什么[39]，[40]中所得到的那些 Q_T 的一般性质和平面二次系统的一般性质是一样的。同时使我们想到，推广平面二次系统改而去研究(21)中的三个平面系统，或直接研究 Q_T 的轨线的定性性质和它的 Hilbert 问题是否更好一些?

2. 梁肇军[41]研究平面二次系统中可拓广而成为射影平面上的连续向量场者，即系统

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 + b_1 x + c_1 y + x(e_1 x + e_2 y), \\ \dot{y} = a_2 + b_2 x + c_2 y + y(e_1 x + e_2 y) \end{cases} \qquad (22)$$

的相图的不同拓扑结构，得到五个相图。

注意：若在(21)中取 Q_1, Q_2, Q_3 为 x_1, x_2, x_3 的齐一次式，则

(22)恰好相当于：

$$Q_1 = -a_1x_3 - b_1x_1 - c_1x_2,\quad Q_2 = -a_2x_3 - b_2x_1 - c_2x_2,$$
$$Q_3 = e_1x_1 + e_2x_2.$$

时的 $W_Q(x)$. 由此可见，(22)这一特殊的，可拓广成为射影平面上的连续向量场的二次系统，实际上不过是 R^3 中的一次齐次向量场在球面 S^2 上所导出的切向量场 Q_T 在 $(x_1,x_2)=(x,y)$ 平面上的投影. 当然，对 R^3 中的二次、三次、…等齐次向量场，我们也可以考虑同样的问题，即：在什么条件之下，球面上的多项式系统可以看成射影平面上的多项式系统？在这方面最新的工作见[94].

补遗

最近作者在[91]中得到 (x, y) 平面上二次多项式系统的发散量 $\operatorname{div}(P, Q)=0$ 在 $(x,1,z)$ 与 $(1,y,z)$ 坐标系之下的表达式分别为：

$$y(\bar{P}_x+\bar{Q}_y)=4\bar{Q} \tag{23}$$

和

$$x(\bar{P}_x+\bar{Q}_y)=4\bar{P}, \tag{24}$$

其中 $\bar{P},\bar{Q}$ 为 P,Q的齐次化. 原来的 $\operatorname{div}(P,Q)=0$ 现在可改写为

$$z(\bar{P}_x+\bar{Q}_y)=0. \tag{25}$$

这三个等式之间的有趣关系已在[91]与[92]中得到初步的应用. 若对(20)中的 Q_T 而言，则相应于(21) 中的三个投影向量场 $\operatorname{div}=0$ 就有更对称的表达式：

$$\begin{cases} 4\bar{Q}_1 - x(\bar{Q}_{1x}+\bar{Q}_{2y}+\bar{Q}_{3z})=0 & (\text{对 } R_Q), \\ 4\bar{Q}_2 - y(\bar{Q}_{1x}+\bar{Q}_{2y}+\bar{Q}_{3z})=0 & (\text{对 } S_Q), \\ 4\bar{Q}_3 - z(\bar{Q}_{1x}+\bar{Q}_{2y}+\bar{Q}_{3z})=0 & (\text{对 } W_Q). \end{cases} \tag{26}$$

下面是一个有趣的猜测.

若在单位球面 S^2 上有一单闭曲线 Γ，使得：

1) Γ 在三个切平面 $x=1$, $y=1$ 和 $z=1$ 上的投影 Γ_1, Γ_2

和 Γ_3 仍都是单闭曲线；

2) R_Q, S_Q 和 W_Q 的发散量分别在 Γ_1, Γ_2 和 Γ_3 所包围的平面区域上的二重积分都等于零，

则 Γ 必为 Q_T 的闭轨线。

不论这个猜测是对还是错，它必有一个确定的答案，我们希望答案是肯定的。

§ 6. 曲面上的 P 式稳定运动和中心

如所熟知，一动力系统中过一点 p 的运动 $\varphi(p, t)$ 称为正向 P 式稳定(或 P^+ 稳定)，如果

$$\varphi(p, I)\subset\Omega_p \text{ 或 } \overline{\varphi(p, I)} = \Omega_p.$$

$\varphi(p, t)$ 称为负向 P 式稳定(或 P^- 稳定)，如果

$$\varphi(p, I)\subset A_p \text{ 或 } \overline{\varphi(p, I)} = A_p.$$

当 $\varphi(p, t)$ 同时为 P^+ 及 P^- 稳定时，则有

$$\overline{\varphi(p, I)} = \Omega_p = A_p,$$

这时称 $\varphi(p, t)$ 是 P 式稳定的.

当 $\varphi(p, t)$ 为 P 式稳定时，p 必为非游荡点(定义已见于§2定义 8)，但其逆不一定成立. 下面我们将会看到这两者之间，以及 P 式稳定运动和回复运动(见定义 1) 之间的差别和联系.

设 $\varphi(p, t)$ 是度量空间 M 中的动力系统，则易见 M 中一切游荡点的集合 W 是开的不变集. 从而一切非游荡点的集合 $(M)_1 = M - W$ 是流 φ 的闭不变集. 当 M 是紧空间时 $(M)_1$ 也是紧的，于是可以研究由 φ 确定的 $(M)_1$ 中的动力系统，其中非游荡点的集合 $(M)_2$ 是 $(M)_1$ 的一个紧不变集. 假如 $(M)_2 = (M)_1$ (当然，也有可能 $(M)_1 = M$)，那么这种求非游荡点集合的步骤到此便告结束. 但若 $(M)_2$ 是 $(M)_1$ 的真子集，我们就可以研究 φ 在空间 $(M)_2$ 中的非游荡点，其全体又构成一个新的紧闭不变集合 $(M)_3$. 如此继续进行，根据超限叙列的 Cantor-Baire 定理可知最后必定会遇到一个第一类或第二类序数 α，使其有

$$(M)_\alpha = (M)_{\alpha+1} = \cdots$$

我们称 $(M)_\alpha$ 是 M 中的流 φ 的中心运动集合[1]，它显然是紧的闭不变集。α 称为中心的深度.不难举出 $M=(M)_1$ 或 $(M)_1=(M)_2$ 的简单例子，在 [10] 第五章中还介绍了 A.Г.Майер 所作出的，实心环中以任一给定的第二类超限数为深度的中心之例。

易见 M 中每一 P^+ 或 P^- 稳定轨线上的点都属于每一 $(M)_k$，因而它也属于中心. 可以证明 [10]:

定理 1. 在紧空间中定义的动力系统的中心运动集合是全部 P 式稳定轨线所成集合的闭包。

另一方面，在 §2 定义 10 中我们曾定义了动力系统的极小集合。应用上述求中心的同样办法,不难得到(见 [10] 第五章 §7):

定理 2. 度量空间 M 中的动力系统的每一闭的不变紧集都必包含一个紧极小集 F_B。

显见有 $F_B \leqslant (M)_\alpha$。还可证明极小集合有如下的特征（见 [10]):

定理 3. 紧极小集的所有轨线都是回复运动。反之，如果回复运动位于完备空间中,则其闭包是一紧极小集。

这里所说的回复运动,其定义如下:

定义 1. 运动 $\varphi(p, t)$ 称为是回复的,如果对于任一 $\varepsilon>0$ 有 $T(\varepsilon)>0$ 存在,使 $\varphi(p, t)$ 上时间长度为 T 的任一轨线弧能够接近整条轨线准确到 ε。意即,对任何固定的 t_0 都有

$$\varphi(p, I)\subset S(\varphi(p, [t_0, t_0+T]), \varepsilon)。$$

上式右方表示弧段 $\varphi(p, [t_0, t_0+T])$ 的 ε 邻域。

不难看出,回复运动必为 P 式稳定,但其逆不真。不论是回复运动还是 P 式稳定运动，它们都是非游荡运动。三者的包含关系已见于 §2。

由上可见，P 式稳定运动之于中心集合，恰如回复运动之于极小集合,但应注意:

1. 若极小集合含一奇点(或一周期轨线)，则它只能是这个奇

---

1) 这里用的是G. D. Birkhoff 原来的定义. 以后的文献中还有另外两种定义，由此而得的中心运动集合不一定和这里的一样,详情见 [42].

点(或这条周期轨线)。但中心集合内却可以既含奇点又含非闭的 P 式稳定轨线;或既含奇点又含一族闭轨,例如初等奇点中的中心和其外的全体闭轨构成一中心集合。

2. 对于曲面上的动力系统,由前几节的讨论可知:柱面、Möbius 带、射影平面和 Klein 瓶上都没有非闭的 P 式稳定运动。所以要研究 P 式稳定运动与回复运动,应从环面 T^2 或 P_3 开始,亏格比它们小的可定向与不可定向曲面可以不考虑。

3. 由于极小集具有"如果极小集有一点是内点,则它的每一点都是内点"的性质([10]第五章§7),所以如果曲面 M 上的动力系统 $\varphi(p,t)$ 存在含有内点的极小集,则此集在 M 上既开且闭,因而只能是整个曲面。又此极小集中不能含奇点,故 M 只能是 T^2。由此可见,对于曲面来说,非明显极小集必为曲面上无处稠密的闭集,例如,环面上某些动力系统的例外极小集。

基于上述这些原因,本节将主要研究曲面上 P 式稳定运动的性质,中心集合的深度和极小集的深度。

首先,介绍 A. Майер [43] 与 N. Markley [44] 关于可定向与不可定向紧曲面上独立的 P 式稳定运动闭包的个数估计定理。

定理 4. 在亏格为 n 的可定向紧曲面 M 的两条(或同一条)边界上的某确定的两点之间只能引不多于 $2n$ 条的简单弧,使它们彼此不相交,且其全体不从曲面 M 上分出一块(拓扑)平面区域。

证. 用反证法.假设这种弧有 $2n+1$ 条.若 $n=0$,则 M 为柱面,或拓扑圆盘,定理显然成立。故可设 $n\geqslant 1$。如果我们沿着其中的一条弧割此曲面,则所得仍是一个连通曲面 M',M' 的亏格仍为 n,在其上还有 $2n$ 条简单弧,它们都连接同一边界上的两定点。现在我们再沿这些弧中之一切割 M',则此割线与前一割线一起可视为 M 上的一条单闭曲线割痕 l。

如果 l 把 M 分成两部分,则有两种可能性:

1. 一部分是平面区域,这时证明已告完成。

2. 得到两个曲面 S_1,S_2,都不是平面区域,其亏格分别为 n_1 与 n_2,则 $n_1+n_2\leqslant n$。否则,由曲面熟知的性质(见§1 定理 5),

在 M 上将可作出多于 n 条的，互不相交的单闭曲线，其全体不把 M 分割为不连通集，这是和 M 的亏格为 n 相矛盾的。今若 S_1 上有 $2n_1$ 条简单弧，都连接同一境界线上的两定点，则今后可对 S_1 进行讨论。否则，设 S_1 上有少于 $2n_1$ 条简单弧，则在 S_2 上将有不少于 $2n-2n_1\geqslant 2n_2$ 条弧，每一条都连接同一边界上的两点。这时可以把此边界看成一点。如此继续做下去，最后必可得一平面区域，因为 $n=1$ 时定理的结论成立。

如果 l 不把 M 分成两部分，则可继续往下做。在此过程中，或是在某一步时得到前面的结果；或是一直做到最后，即已作出 n 条单闭曲线割痕 $l_1, l_2, \cdots, l_n$，而曲面仍是连通的。这时所得的连通曲面的亏格为零，但其上尚有一条简单弧 C 连接它的两个边界点；因此 C 必定从曲面上分出一个平面区域。定理证毕。

定理 5. 设 γ_+ 是亏格为 n 的可定向紧曲面 M_n 上的连续流的一条正半轨，它有不属于边界且异于奇点的极限点；同时它本身又属于另一正半轨的极限集，则 γ_+ 必为 P^+ 稳定。

证. 不妨设 γ 不是闭轨。设 O 是 γ_+ 的 Ω 极限集中的一个常点，又 γ_+^1 是趋向 γ_+ 的另一正半轨。过 O 作无切弧 $\overline{OA}$，它应与 γ_+ 交于无数多个点。今在其中取出收敛于 O 的点列 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$。我们只须证明：如果定理对 M_n 不成立，则或是导出矛盾，或是由此可导出定理对某一亏格为 $n-1$ 的曲面不成立，并且当 $n=1$（环面）时也可导出矛盾。

在 $\overline{OA}$ 上取一任意小的弧段 $\overline{PQ}$，以 E_2 为其内点。如果不论 $\overline{PQ}$ 怎样短，它必定还包含上述点列中异于 E_2 的点，则 γ_+ 显然是 P^+ 稳定的。今设 $\overline{PQ}$ 上除 E_2 之外没有 γ_+ 的其它点了。由于已设 γ_+ 属于 $\gamma_+^\prime$ 的极限集，故 $\overline{PQ}$ 上应有 $\gamma_+^\prime$ 的无数个点。今按 t 增加的顺序任取其中的两点 D_1, D_2，则 $\gamma_+^\prime$ 上的 $\widehat{D_1D_2}$ 弧与 $\overline{PQ}$ 上的线段 $\overline{D_1D_2}$ 构成一单闭曲线 K。若 K 分割 M_n 成为两部分，其中一部分是平面区域，则由 Jordan 曲线定理立刻可导出矛盾。这是因为 $\overline{OA}$ 被 $\overline{D_1D_2}$ 分为两部分，每一部分都包含 γ_+ 的点，而 γ_+ 又不可能与 K 相交，故得矛盾。

若K分M_n为两半，任何一半都不是平面区域，则γ'_+自D_1之后不再与K相交，且与γ_+一起位于M_n的某一半M'_n内，M'_n以K为边界. 沿K割切M_n，得到亏格小于n的曲面M'_n. 于是问题归结为对亏格小于n的曲面证明本定理. 但当$n=1$时这是不可能的，因为如果K把环面分成两块，其中必有一块是平面区域.

其次，设K不把M_n分成两块，则可能出现两种情况：或是γ'_+从某一时刻以后不再与K相遇，或是γ'_+当t无限增加时与K相交无数次. 若出现第一种情况，则沿着K将M_n割开（这时每一块的亏格都必小于n），并以γ'_+与K的最后交点以后的半轨来代替γ'_+，我们重又归结为在一亏格小于n的曲面上来证明本定理，因为已知γ_+不与K相交. 但当$n=1$时，若K不把环面分开，则得柱面，亦即平面环域，其中不存在非闭P^+稳定轨道，矛盾.

若出现第二种情况，即K不分开M_n，且γ'_+与K相交无数次. 则可先沿K割开M，然后在被割开的曲面上仿以上办法再进行讨论. 于是又得一K'，它不分开M，且γ'_+与K_1相交无数次，我们便可再沿K'割开M. 如此进行下去，由定理4知可得到平面区域，其边界为G，而与G的边界不相交的γ_+既有点在G内部，又有点在G外部，不可能.

定理 6. 若亏格为n的可定向紧曲面M_n上的P^+式稳定非闭半轨γ_+的ω极限集中有P^+式稳定非闭半轨γ'_+，则γ'_+的ω极限集中也有半轨γ_+. 对P^-式稳定非闭半轨也有同样的结论.

证. 在γ_+的任一点A处作无切弧段$\overline{AB}$，其上应有γ_+的无数个点. 由于此弧段可以取得任意小，故只须证明γ'_+必与$\overline{AB}$相交即可. 今设γ_+按t增加的次序与$\overline{AB}$交于$B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 在γ'_+上任取一点O，过O作无切弧$\overline{OC}$，其上应有γ'_+的无数个点，因而也有γ_+的无数个点$C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots \to O$. 象在定理5的证明中一样，取$\gamma_+$上与$\overline{AB}$的相邻交点之间的弧段$\gamma_{m+}$（位于$B_{i_k}$与$B_{i_k+1}$之间）所成的叙列，使得$\gamma_{i_k+}$交$\overline{OC}$于$C_{p_k}$与$C_{p_k+1}$之间，且不与$\overline{OC}_{p_k+1}$相交；又当$p_k\to+\infty$时有$i_k\to+\infty$.

γ_+ 上的弧 $\widehat{AB}_1$ 与无切线段 $\overline{AB}_1$ 构成闭曲线 K. 它不可能把 M_n 分成两部分，因为由假设，γ_+ 与 K 有无数个交点。今若 γ'_+ 不与 $\overline{AB}$ 相交，则沿 K 与弧 γ_{1} 割开 M_n 时我们将不会遇到 γ'_+. 然后类似于定理 5 的证明方法即可导出矛盾。

定理 7. 在亏格为 n 的可定向紧曲面上的连续流不可能有多于 n 条的 P 式稳定非闭半轨，使其中任一条都不属于其它一条的极限集，并且这个数目是可以达到的。

证. 用反证法。设结论不对，即在 M_n 上有不少于 $n+1$ 条 P 式稳定非闭半轨，使其中任一轨线都不属于其它轨线的极限集。设 γ_+ 是这些半轨中之一，A 是 γ_+ 上的任一点。在 A 点可作一无切弧 $\overline{AB}$，使 γ_+ 能与之相交，而其它 n 条 P 式稳定半轨不与之相交。设 γ_+ 在 A 点之后与 $\overline{AB}$ 交于 C。研究由 γ_+ 上的 $\widehat{AC}$ 弧与无切线段 $\overline{AC}$ 所构成的闭曲线 K. 显然，它不能包围一平面区域，否则 γ_+ 将既有极限点在此平面区域中，也有极限点在此区域之外，因而既要进入此区域，又要跑出此区域，这是不可能的。

若 K 分 M_n 为两部分 M'_n 与 M''_n，但都不是平面区域，则一切轨线当 t 增加时与 K 上的 $\overline{AC}$ 相交者，或是都由 M'_n 进入 M''_n，或是反之。因此 γ_+ 从 C 开始以后或是全部位于 M'_n 中，或是全部位于 M''_n 中. 由于已设其它 n 条 P 式稳定半轨都不与 $\overline{AC}$ 相交，显见问题已化为对亏格小于 n 的曲面来证明本定理。但对 $n=1$ 时这情况显然是不可能的。

若 K 不分开 M_n，则沿 K 割开 M_n，我们得到有边界的亏格为 $n-1$ 的曲面。按假设，在其上存在 n 条 P 式稳定非闭半轨，其中任一条不属于其它一条的 ω 极限集。但对 $n=1$ 的情况，我们可得平面区域，从而导出矛盾。

由上述论证，一方面可推出 $n=1$ 时定理的正确性，另一方面由归纳法又可推出定理对任何正整数 n 都是正确的。

关于本定理后半部的证明可由下一定理的后半部的证明看出。

定理 8. 亏格为 g 的不可定向紧曲面 N_g 上的连续流至多有

$\left[\frac{g-1}{2}\right]$ 个不同的 P 式稳定非闭轨线，使其中任一条都不属于其他一条的极限集，并且这个数目是可以达到的[14]。

证。不妨设 $g>1$。若 N_g 有边界，则 N_g 可视为闭曲面 P^g 的子空间，使 $\overline{P_g-N_g}$ 是由有限多个闭圆盘所构成的。由于 N_g 的每一条边界曲线是流的不变集（当 N_g 有边界时的补充假设），所以总可把 N_g 上的流拓广到这些圆盘的内部而不会增加新的、独立的非闭 P 式稳定轨线。因此不妨设 N_g 就是不可定向闭曲面 P_g。

现在假设 P_g 上的某一连续流有 k 条独立的非闭 P 式稳定轨线，分别经过 k 个点 $x_1, x_2, \cdots, x_k$, $k>\left[\frac{g-1}{2}\right]$。以 $A_i(i=1, 2,\cdots,k)$ 记这 k 条轨线的闭包，当 $j\neq i$ 时我们有 $x_j \notin A_i$。

今设 (M_{g-1},p) 是 P_g 的可定向二重覆盖，M_{g-1} 的亏格为 $g-1$。P_g 上的连续流 φ 在 p^{-1} 之下映成 M_{g-1} 上的连续流 $\tilde{\varphi}$，使得

$$p(\tilde{\varphi}(x,t))=\varphi(p(x),t).$$

今设 $\{x_{i1}, x_{i2}\}=p^{-1}(x_i)$，以 A_{ij} 记经过 x_{ij} 的 $\tilde{\varphi}$ 的轨线（它也是 P 式稳定非闭轨线）的闭包。由 $k>\left[\frac{g-1}{2}\right]$ 可导出 $2k>g-1$。故由定理 7 知道必有某一 i 使 $A_{i1}=A_{i2}$，不妨设 $i=1$，即 $A_{11}=A_{12}$。

设 S 是在点 x_{12} 处的局部无切弧，使

$$S\cap A_{ij}=\varnothing,\ 对\ i\geqslant 2.$$

今取 τ 为使 $\tilde{\varphi}(x_{11},\tau)\in S$ 的最小的正实数，又取 σ 为满足 $\sigma\in[0,\tau]$ 的最大的非负实数，它使

$$\tilde{\varphi}(x_{12},\sigma)\in S$$

成立。设 $\bar{l}$ 表示由弧 $\tilde{\varphi}(x_{11},[\sigma,\tau])$ 以及 S 上连接 $\tilde{\varphi}(x_{11},\tau)$ 与 $\tilde{\varphi}(x_{12},\sigma)$ 的线段所构成的简单弧。因为

$$p(\tilde{\varphi}(x_{12},\sigma))=p(\tilde{\varphi}(x_{11},\sigma))=\varphi(x_1,\sigma),$$

所以 $l=p\bar{l}$ 是 P_g 中的单边单闭曲线。

设 S' 是流 φ 在 x_2 处的局部无切弧，使

$$S' \cap l = \varnothing, \quad S' \cap A_j = \varnothing, \quad j \neq 2.$$

则存在正实数 σ' 与 τ' 使得

$$\varphi(x_2, \sigma') \in S', \quad \varphi(x_2, \tau') \in S',$$

而弧 $\varphi(x_2, [\sigma'_1, \tau'])$ 与 S' 上连接 $\varphi(x_2, \sigma')$ 与 $\varphi(x_2, \tau')$ 的线段一起构成 P_g 上一条双边单闭曲线，记之为 L。由于 $\varphi(x_2, t)$ 是非闭 P 式稳定，故 L 不能把 P_g 分成两块。我们可以改变 P_g 上的流，使 L 上的点全部成为奇点，而一切与 L 无公共点的轨线则保持不变。现在沿着 L 割开 P_g，则得一新的曲面 Z，其上的流至少有 $k-1$ 条独立的 P 式稳定轨线。由于 $L \cap l = \varnothing$，知道 Z 是不可定向曲面。假设 Z 的亏格是 g'，则有

$$\chi(P_g) = 2 - g = \chi(Z) = 2 - (2 + g'),$$

故 $g' = g - 2$，从而

$$\left[\frac{g'-1}{2}\right] = \left[\frac{g-1}{2}\right] - 1 < k - 1.$$

这样就把问题归结为对亏格 g' 的流形 Z 来证明本定理。由于 $g' = g - 2$，故 g 与 g' 有相同的奇偶性。作为归纳法的起点，我们应证明定理对 $g=1$ 及 $g=2$ 成立。但已知定理对 Möbius 带，射影平面和 Klein 瓶都成立，故定理的前半部分得证。

为了证明定理的后半部，可以从环面上有无处稠密 P 式稳定非闭轨线（设其闭包为 Σ）的连续流开始。改变这一流动，使在 $T^2 - \Sigma$ 上有两个闭圆盘充满奇点，然后把这两圆盘的内部切去。用 n 个这种动力系统的样本接在一起，即得一亏格为 n 的可定向曲面，它具有两个边界圆。然后以充满奇点的横截帽接到一个或两个边界圆上去，我们得到一亏格为 $2n+1$ 或 $2n+2$ 的不可定向曲面。最后注意

$$\left[\frac{2n+1-1}{2}\right] = n, \quad \left[\frac{2n+2-1}{2}\right] = n,$$

即知定理的后半部正确。

注意： 对于流形上的非明显极小集，[45] 证明亏格为 g 的流

形上至多有 $2g-1$ 个不明显的极小集。但实际上用此法可证极小集最多只有 g 个。当然,这一结果也可以由定理 7 和 8 推出。

下面研究中心运动与极小集的深度问题。前已提及,当流形的维数 $\geqslant 3$ 时,中心运动的深度可以是任意给定的第二类超限数。但对曲面来说,情况要简单得多。A. J. Schwartz 与 E. S. Thomes[46] 证明在可定向曲面上中心运动的深度 $\leqslant 2$。董镇喜[47]证明其上动力系统的极小集合的深度 $\leqslant 3$。现在来介绍他们的结果。

定义 2. 设 M 为二维可定向连通流形。若对 M 内部任一单闭曲线 C, $M-C$ 总是不连通的,则称 M 是 1 型的。用归纳法,若对 M 内部任一非零伦单闭曲线 C, $M-C$ 至多是 n 型的,则称 M 是 $n+1$ 型的。

与此等价的是下面的

定义 3. 称 M 是 $n+1$ $(n\geqslant 1)$ 型的二维可定向连通流形当且仅当对于 M 内部任何 $n+1$ 条互不相交的单闭曲线 C_1, $C_2,\cdots,C_{n+1}$, 集合 $M-\bigcup_{i=1}^{n+1} C_i$ 是不连通的;并且在 M 内部存在 n 条互不相交的单闭曲线 $C_1',C_2',\cdots,C_n'$, 使 $M-\bigcup_{i=1}^{n} C_i'$ 是连通的。

注意: 在上二定义中 M 可能无界,也可能有界,但不是紧的。显见 $S^2=T_0$ 是 1 型的, $T_1=T^2$ 是 2 型的.一般 T_k 是 $k+1$ 型的。

引理 1. 设 M 是 k 型的二维可定向连通流形,则必存在 M 到 $T_{k-1}-F$ 上的同胚,其中 F 是某一闭的全不连通集。

这个引理的证明需要用到 L. Zippin[48] 的定理:

一个 1 型可定向连通二维流形必定同胚于 S^2-F',其中 F' 是一全不连通集。

由于此定理的证明太困难,故从略。直观地说,1 型可定向连通二维流形就是从 S^2 挖去许多(可能是无数个)闭圆盘而得到的不带边球面。Zippin 的文中称之为 cylinder tree。今设想把每

一圆盘缩为一点，不同的圆盘缩向不同的点，结果就得到S^2-F'.

引理的证明. 由 Zippin 定理知道引理当$k=1$时成立. 今设M是k型的，则由定义3知道存在$k-1$条互不相交的单闭曲线$C_1,\cdots,C_{k-1}$位于M内部，使$M-\bigcup_{i=1}^{k-1}C_i$是一连通集. 因M为可定向，故每一C_i在M中总存在一闭邻域A_i，它们都同胚于环域，且可使各A_i互不相遇. 于是

$$N=M-\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i$$

是1型的，故必同胚于S^2-F'，F'为全不连通集. 今设d_i，e_i是F'中的两点，它们各对应于A_i的一条单闭曲线边界. 记

$$F=F'-\{d_i,e_i\,|\,i=1,2,\cdots k-1\}.$$

又设D_i与E_i是S^2中分别包含d_i与e_i的圆盘，它们不含F'的其它点. 则N同胚于

$$S^2-[(D_1\cup E_1)\cup\cdots\cup(D_{k-1}\cup E_{k-1})]-F,$$

从而M同胚于$N+\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i=T_{k-1}-F$，证毕[1].

引理2. 设Γ是一连续统（紧连通集），它包含在T_k中. 则或是Γ位于一开圆盘之内，或是$T_k-\Gamma$的每一个连通分支的型号$\leqslant k$.

证. 当$k=0$时引理显然成立. 今设$k\geqslant1$，而$T_k-\Gamma$的某一连通支Z的型号$\geqslant k+1$. 则在Z中存在k条互不相交的单闭曲线$C_1,C_2,\cdots,C_k$，使$Z-\bigcup_{i=1}^{k}C_i$仍为连通集. 于是$T_k-\bigcup_{i=1}^{k}C_i$是连通的，型号为1. 故由引理1知存在$T_k-\bigcup_{i=1}^{k}C_i$到S^2-F上的同胚h，其中F为全不连通集，它位于$S^2-h(\Gamma)$的某一连通分支中. 因此存在S^2中的一个闭圆盘D使$F\subset D\subset S^2-h(\Gamma)$，于是$S^2-D=U$是一开圆盘，包含$h(\Gamma)$，从而$h^{-1}(U)$

---

1) 等式左边的和集表示给N装上$k-1$个柄.

是 T_k 中一个包含 Γ 的开圆盘，引理证毕。

引理 3. 设 Γ 是 T_k 中的一个连续统，W 是 $T_k-\Gamma$ 的一个连通分支。则 $\overline{W}$ 有有限多个边界分支。若把 $\overline{W}$ 的每一边界分支都缩为一点，则所得的集合 $\widetilde{W}$ 同胚于 T_l，$l\leqslant k$。

证. 由假设知 W 的型号若为 m，则 $m\leqslant k+1$。由引理 1 知存在 W 到 $T_{m-1}-F$ 上的一个同胚 h，其中 F 为全不连通。F 中的点 u 如果与 W 的边界分支 C 相对应，则对 W 中收敛于一边界点 $v\in C$ 的叙列 $\{w_i\}$，必有 $h(w_i)\to u$。今设 F 至少有 $k+2$ 个点。在 $h(W)$ 中选取 $k+1$ 条互不相交的单闭曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_{k+1}$，使 $h(W)-\bigcup\limits_{i=1}^{k+1} C_i$ 的每一连通支都包含 F 的一点。那么 $W-\bigcup\limits_{i=1}^{k+1} h^{-1}(C_i)$ 的每一连通支的闭包中必含 ∂W 的一点。于是

$$\left[W-\bigcup_{i=1}^{k+1} h^{-1}(C_i)\right]\cup\Gamma$$

是连通集，从而 $T_k-\bigcup\limits_{i=1}^{k+1} h^{-1}(C_i)$ 为连通集，这是不可能的。所以 F 最多只含 $k+1$ 个点，即 ∂W 最多有 $k+1$ 个连通支。

引理的后半部可由引理 1 及以上论述立即推得。

注意：由此引理可知 $T_1=T^2$ 上的例外极小集 Γ 的余集的每一连通支最多只有两条边界，故必同胚于圆环。

引理 4. 设 Γ 是二维可定向流形 X 中的连续统，它与一闭弧 S 交于一全不连通集。W 是 $X-\Gamma$ 的一个连通支，$\mathfrak{S}$ 是 $S-\Gamma$ 的一切位于 W 中的连通支所成之集合。若 $\mathfrak{S}=\{S_i|i=Z\}$ 为一无限集，则对几乎所有的 i 存在开圆盘 $W_i\subset W$，使 W_i 的边界包含在 $S_i\cup\Gamma$ 中。

证. 仍用前一引理中的记号。设 $\widetilde{W}$ 在 h 之下的象为 T_k。以 q 表 $\overline{W}$ onto $\widetilde{W}$ 的映象，则 $\overline{W}$ 的边界分支 $K_1, \cdots, K_S$ 经 h, q 而映到一有限集 $F=\{k_1, \cdots, k_s\}$。设 U 是 T_k 中 s 个互不相交，且

各包含一点 k_i 的圆盘的和集、那么 $q^{-1}(h^{-1}(U))$ 是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ 在 $\widetilde{W}$ 中的邻域，使几乎所有的 S_i 都位于此邻域中。对每一 i，$h\cdot q(S_i)$ 是 U 中一圈 (loop)。故必包围一开圆盘 V_i。令 $W_i=q^{-1}(h^{-1}(V_i))$，即得 X 中一开圆盘，它的边界位于 $S_i \cup T$ 中。

定义 4.

1)用 $A(n)$ 表示命题：

若 $M = T_n$ (型号为 $n+1$)，则 M 上任一动力系统的中心的深度 $\leqslant 2$。

2) 用 $B(n)$ 表示命题：

若 X 是可定向连通无边界二维流形，其型号为 n，则 X 上任一动力系统的中心的深度 $\leqslant 2$。

我们将按下列顺序来证明 $A(n)$ 与 $B(n)$ 对一切 n 成立。

$A(n) \Rightarrow B(n+1) \Rightarrow A(n+1) \Rightarrow B(n+2) \Rightarrow \cdots$

I. $A(0)$ 的证明。

设 $\varphi(p, t)$ 是 S^2 上一动力系统，我们要证明

$$(S^2)_2 = F \cup \bar{P}$$

就是中心运动，其中 F 是奇点集合，$\bar{P}$ 是闭轨集合的闭包。今设 x 是 $(S^2)_2$ 中一点，如果 x 是奇点，则 $x \in (S^2)_\alpha$ 对一切 $\alpha \geqslant 2$，故 x 是中心运动中的点。这就证明了奇点集合 F 属于中心运动。

次设 x 是常点，则可作一包含 x 的任意小的流盒 U。由定义，其中必含 $(S^2)_1$ 中的点 y (可能 $y=x$)，使 $\varphi(y, t)$ 当 t 增加时能离开 U，并且后来重又回到 U 中来。如果 $\varphi(y, t)$ 不是闭轨，则容易由 Jordan 曲线定理导出矛盾。故 $\varphi(y, t)$ 必定是闭轨，从而 $x \in \bar{P}$。反之，易见 $\bar{P} \in (S^2)_\alpha$ 对一切 $\alpha \geqslant 2$。证毕。

现在假设 $A(k)$，$B(k)$ 对 $k=0, 1, \cdots, n-1$ 都已得到证明。我们要证

$A(n) \Rightarrow B(n+1)$ 以及 $B(n+1) \Rightarrow A(n+1)$。

II. $A(n) \Rightarrow B(n+1)$的证明。

设 X 满足 $B(n+1)$ 中的条件。由引理 1 知存 X 到 $Y=$

$T_n - F$ 的一个同胚 g。设 $\varphi_t = \varphi(p, t)$ 是 X 上一动力系统，于是 $f_t = g\varphi_t g^{-1}$ 是 Y 上一动力系统，它可以容易地被拓广到 T_n 上去，使 F 上每一点都成为奇点。因 $A(n)$ 成立，故 $(T_n)_2$ 即为中心运动，从而 $(X)_2$ 也是中心运动，故 $B(n+1)$ 成立。

III. $B(n) \Rightarrow A(n)$ 的证明。

设在 $X = T_n$ 上有一动力系统 φ_t，我们要证明 $(X)_2 = (X)_3$。首先注意：若存在一非闭 P^+ 或 P^- 稳定轨线 γ，则证明已告完成。因为如果 γ 位于 X 上一圆盘内，则 γ 应是闭轨，与假设不合。故不妨设 γ 不能包含在一圆盘内。以 $\mathfrak{W}$ 记 $X - \gamma$ 的连通分支的集合，$\mathfrak{W}$ 中每一元素 W 是一无边界的可定向二维流形。由引理 2，W 的型号 $\leqslant n$。按照归纳法的假定，φ_t 限制在 W 上时有 $(W)_2 = (W)_3$ 是中心运动。又 γ 本身位于 $(X)_2$ 中，且也在中心运动中。因此，

$$(X)_2 = \gamma \cup \{(W)_2 | W \in \mathfrak{W}\}$$

是 φ_t 的中心。

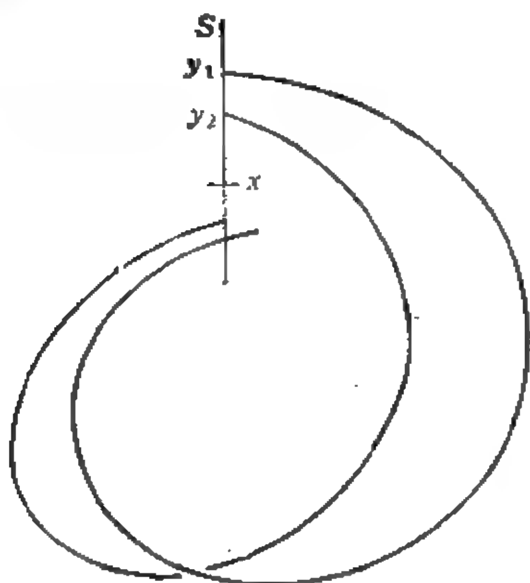


图 6.1

以下不妨设 P^+ 或 P^- 稳定运动都是周期运动。现在假设 $(X)_2 \neq (X)_3$，我们要导出矛盾。

设点 $x \in (X)_2 - (X)_3$，设 S 是 φ_t 的经过 x 点的横截弧，以 x 为其内点。$\{y_i\}$ 是 $(X)_1 - (X)_2$ 中一系列的轨线与 S 的交点，这些轨线都与 S 再相交而构成迴路，且收敛于 x。y_i 与其迴路可用图 6.1 来表示。

现在定义一个与 $\{y_i\}$ 有关的连续统 Γ。

a) 设有无数多个 y_i 位于同一轨道 $\gamma(y)$ 上。这时显见应有 $y \in (X)_1 - (X)_2$，且 x 属于 $A(y)$ 或 $\Omega(y)$。x 不能属于 $\gamma(y)$，因为 $x \in (X)_2$ 而 $y \bar{\in} (X)_2$。不妨设 $x \in \Omega(y)$，这时我们定义 $\Gamma =$

$\Omega(y)$。

b) 设只有有限个 y_i 位于同一条轨道上。这时可以从 $\{y_i\}$ 中取一子序列，仍记为 $\{y_i\}$，使得当 $i \neq j$ 时 y_i 与 y_j 不属于同一轨线并且定义

$$\Gamma = \limsup \gamma(y_i) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} \gamma(y_i)}.$$

在两种情况，Γ 都是一个包含 $\gamma(x)$ 的不变连续统。今证序列 $\{y_i\}$ 可如此选取，使一切 $y_i \in \Gamma$。

定义 5. 若 σ 是 $\{y_i\}$ 的任一子序列，以 $\Gamma(\sigma)$ 记由 σ 所定义的连续统，恰如 Γ 由 $\{y_i\}$ 所定义那样。

先证必存在 $\sigma_0 = \{y_i\}$ 的一个子序列 σ，使 σ 的每一点都不属于 $\Gamma(\sigma)$。

如果 $\Gamma(\sigma_0) = \Omega(y)$，则 σ_0 的每一点都不属于 $\Gamma(\sigma_0)$ 已得证明。因为若有某一 $y_i \in \Gamma$，则 $y \in \Omega(y)$，从而 $\gamma(y)$ 是 P^+ 稳定的，故 $\gamma(y)$ 必为周期轨线，从而 $x \in (X)_2$，与假设矛盾。

次设一切 $\gamma(y_i)$ 互不相同(即 b))，并且有无数多个 y_i 属于 $\Gamma(\sigma_0)$。为方便计，不妨设所有的 y_i 都属于 $\Gamma(\sigma_0)$；否则，总可在 $\{y_i\}$ 中取一子序列使其具有这一性质。

经过 y_1 必存在一横截线 S 以及 σ_0 的一个子序列 $\sigma(y_1)$，使得经过 $\sigma(y_1)$ 的每一点的轨线都不与 S 相遇。因若不然，则对每一横截线 S，几乎所有的轨线 $\gamma(y_i)$ 都要和 S 相交。固定这样一条经过 y_1 的横截线 S，并取一 y_k，使 $\gamma(y_k)$ 与 S 相交。设 S' 是 S 的一段，使 $\gamma(y_k)$ 从 y_k 到 S 的那一段弧不与 S' 相遇。于是，对一切与 y_k 相当接近的 y_i，$\gamma(y_i)$ 应和 $S - S'$ 相交。但另一方面，由于 $y_1 \in \Gamma$，故几乎所有的 $\gamma(y_i)$ 应与 S' 相遇。因此必有某一 $\gamma(y_i)$ 要和 S 相交两次(图 6.2)。但若经过 y_1 的每一横截线都必与某一 $\gamma(y_i)$ 相交两次，则 $y_1 \in (X)_2$，这是一个矛盾。因此，必定存在经过 y_1 的一条横截线 S 以及 $\{y_i\}$ 的一个子序列 $\sigma(y_1)$，具有前面所说的性质。

现在定义 σ_0 的一系列的子序列如下：

σ_1 的第一项是 y_1，其余各项由 $\sigma(y_1)$ 构成。因此，σ_1 的第一项不属于 $\Gamma(\sigma_1)$。象从 σ_0 得到 σ_1 一样，可以再得到子序列 σ_2，它的前两项就是 σ_1 的第一、二项，且都不属于 $\Gamma(\sigma_2)$。一般来说，σ_i 的前 i 项与 σ_{i-1} 的相同，但它们不属于 $\Gamma(\sigma_i)$。

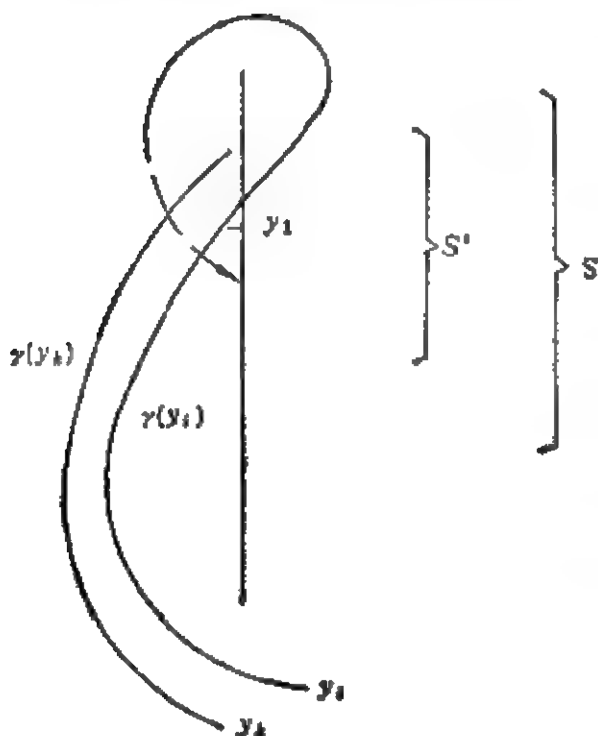


图 6.2

现在由 $\{\sigma_i\}$ 取其对角线元素，记所得的序列为 σ，则 σ 的每一项都不属于 $\Gamma(\sigma)$。为简便计，就假设序列 $\{y_i\}$ 具有这一性质。

下面要证明至关重要的一步：

命题. 如果 S 是流的横截线，则 $\Gamma\cap S$ 是一有限集。

用反证法。假设 $\Gamma\cap S$ 为无限集，先看 $\Gamma=\Omega(y)$ 的情况。这时 $\Gamma\cap S$ 应为全不连通集。设 W 是 $X-\Gamma$ 的包含 $\gamma(y)$ 的连通支。显见 W 应包含 $S-\Gamma$ 的无数个连通支，因为 $\gamma(y)$ 与 $S-\Gamma$ 无数次相交。由引理 4 知存在一开圆盘 W 以及 $S-\Gamma$ 的一个分支 S_1，使 W 的边界位于 $S_1\cup\Gamma$ 中，且 $\gamma(y)$ 穿过 S_1 而进入 W 中。由于 S_1 是流的横截线，故仿 $A(0)$ 的证明可知 $y\in(X)_1$，矛盾。

其次，设 $\Gamma=\limsup\gamma(y_i)$，设 $\mathfrak{W}$ 是 $X-\Gamma$ 的连通支中包含某些 $\gamma(y_i)$ 者所成的集合。注意：这里我们用到了一切 $y_i\notin\Gamma$ 的性质。如果 $\mathfrak{W}$ 含有 $X-\Gamma$ 的无限个连通支，则其中至多有 $n+1$ 个不是 1 型的。否则，我们将可在 X 中找到 $n+2$ 条互不相交的单闭曲线，它们一起不把 X 分开为不连通集。因此，有无数多个，

从而至少有一个开不变圆盘 W，要包含某一$\gamma(y_i)$。现在，$S\cap W$ 是一些分割 W 的横截弧，而 $\gamma(y_i)$ 穿过其中之一。由此知道 $y_i\bar{\in}(W)_1$，从而 $y_i\bar{\in}(X)_1$，矛盾。

以上的论证说明 $\mathfrak{W}$ 只含有限个 $X-\Gamma$ 的连通支。今设 $\mathfrak{T}$ 是 $S-\Gamma$ 的，包含有某一 $\gamma(y_i)$ 的点的连通支所成的集合。由于假设 $\Gamma\cap S$ 为无限集，故 $\mathfrak{T}$ 亦为无限集；从而必有某一 $W\in\mathfrak{W}$，它含有 $\mathfrak{T}$ 的无限多个元素。由引理 4 知必有一圆盘 W' 位于 W 中，它的边界包含在 $\Gamma\cup S'$，S' 是 Γ 的一元素。但某一位于 W 中的 $\gamma(y_i)$ 将与 S' 相交，因而不能在 $(X)_1$ 中，这一矛盾证明 $\Gamma\cap S$ 必为有限集。

由于 Γ 与任一横截线只能相交有限次，故 Γ 中每一轨线在 Γ 中是相对开的。下面证明：Γ 有一邻域，或者是一圆盘，或者是一环域，其内外境界线被 Γ 所分开。

首先注意 $\Gamma-\gamma(x)$ 有一个或两个连通支，因为每一连通支必须与 $A(x)$ 或 $\Omega(x)$ 之一相遇，而 $A(x)$ 及 $\Omega(x)$ 都整个属于Γ。今设K是 $\Gamma-\gamma(x)$ 的一个连通支，而K不位于一圆盘之内。把引理 2 和归纳假设应用于 $X-K$ 的包含 $\gamma(x)$ 的连通支 W，即可证明 $(W)_2=(W)_3$，从而 $x\in(X)_3$，矛盾。这样，$\Gamma-\gamma(x)$ 的每一连通支都应位于一圆盘中。

现在假设 $\Gamma-\gamma(x)$ 只有一个连通支 K。设U是包含K而不包含整条轨线 $\gamma(x)$ 的开圆盘。把 $U-K$ 的所有那些连通支，它们在U中的闭包是紧密的，与K加到一起，所得的连续统记为 $\hat{K}$。则 $\hat{K}$ 是 X 的一个不变子连续统，但不包含 $\gamma(x)$，$\hat{K}$ 不把 U 割开，因此也不将X分开。若把 $\hat{K}$ 收缩为一点，则所得的流形仍与 X同胚。这时Γ的象Γ'是一单闭曲线。设V是一环域，它的两条边界被Γ'分开。那么V的原型就是X中一个环域V^*，它的两条边界被Γ所分开。

今设 T 是经过 x 而位于 V^* 中的局部横截线。由于V^*是Γ的一个邻域，几乎所有的轨线 $\gamma(y_i)$ 整个位于 V^* 中。这些轨线中之一应与T相交两次，类似于对 $A(0)$ 的论证可知任一这种轨

线必为周期轨线，与 $y_i \bar{\in} (X)_2$ 矛盾。

当 $\Gamma - \gamma(x)$ 有两个连通支时，仿前可证 Γ 有一圆盘状邻域，从而某一 $\gamma(y_i)$ 应是周期的，与 $y_i \bar{\in} (X)_2$ 矛盾。

这样，在任何情况下，我们都导出了矛盾。于是必有 $(X)_2 = (X)_3$。因此有：

定理 9. 可定向闭曲面上的连续流的中心运动的深度 $\leqslant 2$ (即 $A(n)$ 对任何 n 成立)。

推广此结果，可得：

定理 10. 连通可定向二维流形，如果型号为有限，则其上任一连续流的中心的深度 $\leqslant 2$。

证. 若 $\partial X = \varnothing$，则因 $A(n) \Rightarrow B(n+1)$。由定理 9 即知本定理成立。 今设 $\partial X \neq \varnothing$，以 $\mathfrak{K}$ 记 X 的边界分支的集合。 $\mathfrak{K}$ 中每一元素 K 是一开弧或一单闭曲线。在前一情况记

$$U(K) = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 < 1, 0 \leqslant y\},$$

其边界是 $y = 0, -1 < x < 1$。在后一情况记

$$U(K) = \{(x, y, z) \in R^3 | x^2 + y^2 = 1, 0 \leqslant z < 1\},$$

其边界是 $z = 0, x^2 + y^2 = 1$。

设 $h(K)$ 是一映 K 到 $\partial U(K)$ 上的同胚。设 $\tilde{X}$ 是由 X 通过 $h(K)$ 给粘上 $U(K)$ 而得到的流形。则 $\tilde{X}$ 与 X 有相同的型号，可定向，且 $\partial\tilde{X} = \varnothing$。

设在 X 上已经给定一动力系统。我们可以把它拓广到 $\tilde{X}$，使得任一 $U(K)$ 的内点都是流的游荡点。因 $\partial\tilde{X} = \varnothing$，$\tilde{X}$ 上的拓广流的中心运动的深度 $\leqslant 2$，从而 X 上的流亦然。

注意：在 [46] 中举出例子说明 Möbius 带上存在深度 $=3$ 的中心运动集合。 由此可见在定理 9 和 10 中“可定向”的条件不能除去。

定理 11. 设 X 是型号为有限的连通可定向二维流形，$x \in (X)_1$，但 $\gamma(x)$ 不为 P^+ 或 P^- 稳定，则 $A(x)$ 与 $\Omega(x)$ 只含奇点。

证. 由定理 10 的证明方法知可设 $\partial X = \varnothing$。若 X 为 1 型的，则对任一 $x \in (X)_1$，易证：如果 $\Omega(x)$ 或 $A(x)$ 中含有常点，则

$\gamma(x)$ 必为周期轨线. 今设定理对型号 $\leqslant n$ 的流形已得证明,又设 X 有型号 $n+1$. 对 $x \in (X)_1$, 若 $\gamma(x)$ 不是 P^+ 或 P^- 稳定, 可令 $\Gamma = \Omega(x)$. 与定理 9 的证明方法类似,可证 Γ 中每一正常轨线都是 Γ 中的相对开集. 如果 Γ 包含一正常轨线, 则它必有一圆盘型或环状邻域. 由通常的定性方法即可导出矛盾.

此定理对不可定向二维流形也是成立的, 见 [49], 在该文献中也证明了本节引理 4 对不可定向流形成立,证明从略.

引理 5. 设 M 为闭曲面, φ 是 M 上的连续流. 如果 $\varphi(p, I^+)$ 是非回复的 p^+ 稳定非闭半轨,则 Ω_p 内必含奇点.

引理 6. 假设 φ 是闭曲面 M 上的连续流, $\varphi(p, t)$ 是一条渐近轨线. 如果 Ω_p 中不含奇点, 且全部由回复非闭轨线组成, 则 Ω_p 是极小集.

利用定理 11 以及引理 4, 5, 6, 余澍祥在 [50] 中证明了下一有趣的定理:

定理 12. 对于异于环面的闭曲面 M 上定义的连续流 φ, 任何正半轨 $\varphi(p, I^+)$ 的 Ω_p 倘若不包含奇点,则 Ω_p 必定在 M 上无处稠密.

证明从略,请参看作者原文.

下面再介绍 [47] 中关于二维可定向流形上的极小集的深度的定理.

定义 6. 设 E 是二维流形 M 上的一个集合. 若从 M 可割出一个包含 E 的 l 型子流形 M_1, 但 M_1 不再存在包含 E 的任何型号小于 l 的子流形,则称 E 是属于 l 型流形的子集.

引理 7. 设 M 是 $-n(\geqslant 2)$ 型的可定向连通二维流形, E 是 M 内属于 $l(\geqslant 1)$ 型流形的连通闭集,则 $M-E$ 是若干个至多为 $n-l+1$ 型的二维流形的和集.

证. 设 M' 是 $M-E$ 的某一连通分支, 它的型号 $m > n - l + 1$. 由定义 3 知道存在互不相交的闭曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_{m-1}$, 使 $M' - \bigcup_{i=1}^{m-1} C_i$ 是一连通集. 其次由 E 的定义知道存在包含 E 的、

M的 l 型子流形 N，因而 N 内必存在互不相交的闭曲线 C_1'，C_2'，$\cdots$，C_{l-1}'，使 $N-\bigcup_{i=1}^{l-1} C_i'$ 是一连通集．可以取N与E足够接近，使 C_i' 与 C_i 也不相交．于是 M 上存在 $m-1+(l-1)=m+l-2>(n-l+1)+l-2=n-1$ 条互不相交的闭曲线，使 $M-UC_i-UC_i'$ 仍为连通集，不可能．

定义 7. 设在二维流形 M 上定义有动力系统 $\varphi(p,t)$．若对 M 上两条轨线 γ_1，γ_2 有 $\bar{\gamma}_1\supseteq\bar{\gamma}_2$，则记为 $\gamma_1\geqslant\gamma_2$．特别地，若 $\bar{\gamma}_1=\bar{\gamma}_2$，则记为 $\gamma_1\doteq\gamma_2$．又若 $\bar{\gamma}_1^{\pm}\supseteq\bar{\gamma}_2$，则记为 $\gamma_1^{\pm}\geqslant\gamma_2$．如果对某一轨线集合中的任二轨线都可按上述意义定义其次序，则称此集合为一轨链．

下面证明二维可定向流形上一轨链的一些性质．

引理 8. 1 型可定向流形上若存在轨链 $\gamma_1>\gamma_2>\gamma_3$，则 γ_3 必为奇点．

证. 由 Zippin 的定理知道 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 都不是非闭的P式稳定轨线，又 γ_1 与 γ_2 不可能是闭轨和奇点，故必皆为渐近轨线[1]．若 γ_3 不是奇点，可在其上一常点处引局部无切弧，它和 γ_2 的某一弧段构成一单闭曲线 C．C 把流形分开为内部和外部，按 Jordan 曲线定理易见不可能有 $\gamma_1>\gamma_2$，矛盾．

引理 9. 若 $\gamma_1>\gamma_2$，且 γ_1 为非闭的P式稳定轨线，则 γ_2 不可能是闭轨．

证明容易，从略．

引理 10. 设在二维可定向流形 M 上的轨链中有 $\gamma_1>\gamma_2>\gamma_3$，$\gamma_1$ 与 γ_2 是渐近轨线，则 γ_3 不是闭轨．

这由定理 11 立刻可推出．

引理 11. 设在轨链 $\gamma_1>\gamma_2>\gamma_3$ 中，γ_1 是非闭P式稳定轨线，则 γ_2 与 γ_3 不可能都是渐近轨线，γ_3 也不能是闭轨或非闭P式稳定的．

---

1) 即 $\gamma\cap\omega(\gamma)=\gamma\cap\alpha(\gamma)=\varnothing$，但 $\omega(\gamma)\cup\alpha(\gamma)\neq\varnothing$.

证. 不妨设流形 M 是紧的，又 $\gamma_2^+>\gamma_3$，则 γ_2 有正向极限集 $\Omega_2\supset\gamma_3$。设 Ω_2 是属于 l 型流形的，$G(\Omega_2)$ 是它的小邻域。由引理 7 知道 $G(\Omega_2)-\Omega_2$ 是 1 型的。渐近轨线 γ_2 从某一点起将进入 $G(\Omega_2)-\Omega_2$ 的某一连通支 W 而不再出来。用反证法，设 γ_3 也是渐近轨线，闭轨，或非闭 P 式稳定轨线，则它不是奇点。利用 γ_3 上的一点 q 的横截线 $\overline{AB}$ 以及 γ_2^+ 上的弧段 $\widehat{AB}$ 作成的闭曲线 K 把 W 分成两个区域 D_1 与 D_2。但这样一来，γ_1 进入 D_2（或 D_1）后就不能出来了，因而不可能是 P 式稳定，矛盾。

引理 12. 设在二维流形 M 上有 $\gamma_1>\gamma_2$，且 γ_1 是非闭的 P 式稳定轨线，则 γ_2 一定不是非闭的 P 式稳定轨线。

证. 由定理 6 知若 γ_2 为非闭的 P 式稳定轨线，则也有 $\gamma_2>\gamma_1$，从而 $\gamma_2\doteq\gamma_1$，与假设相矛盾。

引理 13. 设在二维流形 M 上有轨链

$$\gamma_1>\gamma_2>\gamma_3>\gamma_4,$$

则 γ_4 必为奇点。

证. 先设 M 为紧的。如果 γ_4 不是奇点，则必有下列情况之一。

1) γ_4 为闭轨，但由引理 9, 10, 11 知不可能。

2) γ_4 为非闭 P 式稳定轨线，则由引理 12 及 11 知 γ_1, γ_2, γ_3 都不是 P 式稳定轨线，即它们都是渐近轨线。但由定理 11 知道这是不可能的。

3) γ_4 为渐近轨线。这时又可分为：

a) $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为渐近轨线，与定理11矛盾。

b) γ_1 为非闭 P 式稳定轨线，γ_2 与 γ_3 为渐近轨线，由引理 11 知不可能。

c) γ_2 为非闭 P 式稳定，γ_3 为渐近轨线，由引理 11 知不可能。

d) γ_3 为非闭 P 式稳定轨线，γ_1,γ_2 为渐近轨线，由定理 11 知不可能。

e) 由引理 12 知在 γ_1, γ_2, γ_3 中最多只有两条非闭 P 式稳定轨线，若存在，必为 γ_1 与 γ_3。但 γ_1 与 γ_3 为非闭 P 式稳定轨线，γ_1

为渐近轨线，这种配合的不可能性可仿引理 11 证明之。

综合以上各条即知 γ_i 只可能是奇点。

当 M 为非紧时可仿定理 11 将问题归结为紧流形的情况。由引理 13 可立刻推出：

定理 13. 二维可定向流形上动力系统的极小集的深度 $\beta \leqslant 3$。

例. 对环面上具有例外极小集的无理流，若在某一属于极小集的轨线(必为 P 式稳定)上加上两个奇点，则不难验证这时 $\beta = 3$，而极小集即由此二点组成。

[51] 中还引进了"极限轨线系统"以及相应的深度 d，并证明：在一般度量空间中有 $\beta \geqslant d \geqslant \alpha$，但在紧二维流形上则有 $d = \alpha$。

§7. 紧二维流形上连续流的拓扑分类

关于平面上的连续流或 C^1 流的拓扑分类问题早已在[52]，[53]，[54]和[55]中研究过。至于紧二维流形上的连续流，则[56]最早对 Morse-Smale 系统完成了拓扑分类的工作。其后，[57]，[58]又对更一般的二维流形(不一定紧，也不一定可定向)上的连续流分类问题，及[59]对微分流形上的完全不稳定流的分类问题作了研究。在[53]，[54]，[55]的分类工作中，"典型域"和"分界线"两个概念起了关键性的作用。虽然它们所研究的是曲面动力系统，但是"分界线"仍沿用[54]中对平面动力系统所作的定义。"典型域"则除了[54]已有的"带域"，"螺域"和"环域"以外，只加了一种"环面域"，因而使它们对于具有非闭 P 式稳定轨线的连续流无法进行拓扑分类研究.关于这方面的问题，最近[60]的工作做了适当的补救。本节主要介绍[58]的分类工作及其有趣的应用，最后简要介绍[60]的想法以及我们对分类问题的看法。

定义 1. 设 φ 是二维流形 M 上的连续流，称 (M,φ) 为平行流，如果它拓扑等价于下列四种流之一：

1. R^2 上由 $\dot{x}=1$，$\dot{y}=0$ 所定义的流；
2. $R^2-\{0\}$ 上由 $\dot{r}=0$，$\dot{\theta}=1$ 所定义的流；
3. $R^2-\{0\}$ 上由 $\dot{r}=r$，$\dot{\theta}=1$ 所定义的流；
4. $S^1\times S^1$ 上的有理流。

今后分别称这些平行流为带状流、环状流、螺旋流和环面流，其所覆盖的区域依次称为带域、环域、螺域和环面域。

下面定义"分界线"。关于分界线的定义有好几种。例如，在[61]中称"一条不是奇点的轨线，其拓扑性质不同于其邻近的轨线者"为分界线。在[55]中称"趋于奇点的轨道不稳定半轨"为这个

奇点的分界线．在[54]中则有更严格的定义，今在叙述上略作改动，介绍如下． 首先，对经过点 x 的轨线 $\gamma(x)$，我们定义：

$$\alpha(x)=\overline{\gamma^-(x)}-\gamma^-(x),\quad \omega(x)=\overline{\gamma^+(x)}-\gamma^+(x),\qquad (1)$$

这里 $\gamma^-(x)$ 与 $\gamma^+(x)$ 分别表示 $\gamma(x)$ 的负半轨和正半轨．注意，(1)中的 $\alpha(x)$ 与 $\omega(x)$ 不同于动力系统理论中常见的 $A(\gamma)$（或 A_γ）与 $\Omega(\gamma)$（或 Ω_γ）：

$$A(\gamma)=\bigcap_{y\in\gamma}\overline{\gamma^-(y)},\quad \Omega(\gamma)=\bigcap_{y\in\gamma}\overline{\gamma^+(y)},\qquad (2)$$

例如，当 $\gamma(x)$为闭轨时，$\alpha(x)$ 与 $\omega(x)$ 都是空集，而 A_γ 与 Ω_γ 则都等于 $\gamma(x)$．当 $\gamma(x)$ 为正向非闭 P 式稳定轨线时，$\Omega_\gamma\supset\gamma^+$，而 $\omega(x)$ 则否．

定义 2. 称过 x 的非奇轨线 $\gamma(x)$ 为正常轨线，如果 $\gamma(x)$ 能被包含在一平行流所构成的开邻域N中，又N满足下面两个条件：

1. 对任意的 $y\in N$ 有

$$\alpha(y)=\alpha(x),\quad \omega(y)=\omega(x).\qquad (3)$$

2. $\bar N-N$ 由 $\alpha(x)$，$\omega(x)$ 以及某两条满足条件

$$\alpha(a)=\alpha(b)=\alpha(x),\ \text{和}\ \omega(a)=\omega(b)=\omega(x),$$

的轨线 $\gamma(a)$，$\gamma(b)$ 所组成（$\gamma(a)$ 有可能与 $\gamma(b)$ 重合）．

定义 3. 若 $\gamma(x)$不是奇点，又不是正常轨线，则称它为分界线．

注意：由于定义 2 中对正常轨线所加的条件太强，所以不少轨线都属于分界线之列． 但本节不会遇到使我们难以处理的情况，因为我们还要定义“极限分界线”如下：

定义 4. 一条分界线 $\gamma(x)$ 称为极限分界线，如果 x 不是奇点，且 $\gamma(x)\subseteq(\overline{S-\gamma(x)})$． 这里 S 是连续流 φ 的所有分界线全体所成之集[1]．

本节前半部假设分界线可能有无数条，但没有极限分界线．后半部假设只有有限条分界线，但可能有极限分界线．由于我们只讨

1) 极限环和通常意义下奇点邻域中的分界线都是定义 3 之下的分界线． 若有一非闭分界线趋向于极限环，则此环便是极限分界线．任一 P^+ 或 P^- 式稳定非闭轨线既是分界线，又是极限分界线．

论满足上述条件的曲面动力系统，因此不但排除了 P 式稳定非闭轨线，而且也排除了如图7.1所示的轨线。因为按定义，这时应有无数多条极限分界线存在。下面继续讨论拓扑分类问题。



图 7.1

显见，定义 4 中的集合 S 是流形 M 上连续流 φ 的一个闭不变子集，而 $M-S$ 是一开不变子集。$M-S$ 可能有许多个连通分支，每一连通分支称为连续流 φ 的典型域。

引理 1. (M,φ) 的任一典型域必为一平行域。

证. 由定义知典型域 R 中不含分界线，且其中每一轨线都与直线或圆同胚。今证："R 中任何两条轨线 $\gamma(x)$ 与 $\gamma(y)$ 必可用互不相遇的平行领域把它们分开来"。因若不然，则对 $\gamma(x)$ 的任何平行邻域 N_x 都将有

$$y\in \bar{N}_x=\alpha(x)\cup\gamma(x)\cup\omega(x),$$

于是必有 $y\in\alpha(x)$ 或 $y\in\omega(x)$。但这是不可能的，因为我们可以找到一个包含 y 的平行邻域 N_y，使 N_y 不含 $\gamma(x)$，故显然可见不可能有 $y\in\alpha(x)\cup\omega(x)$。

以上的事实说明商空间 R/φ 是一维连通 Hausdorff 流形，并且自然投影

$$\pi:\ R\to R/\varphi$$

是局部明显的。现在底空间是 R^1 或 S^1，纤维也是 R^1 或 S^1，故只有四种可能的组合，它们分别对应于定义 1 中的四种平行域，其中带域与螺域的纤维是开弧，环域与环面域的纤维是圆。带域与环域的全截痕是开弧，螺域与环面域的全截痕是圆。

今设 R 是一带域或环域，I 是它的全截痕。取 $x\in I$，则 $\gamma(x)$ 把 R 分成两个半典型域 R^+ 与 R^-。我们规定 $\gamma(x)\in R^{\pm}$。若 R 为一螺域，C 是它的全截痕，则 C 分 R 为两个半典型域

$$R^+=C\times[0,\infty)\ 与\ R^-=C\times(-\infty,0].$$

不论在那一种情况，总记

$$\delta R^+ = \overline{R^+} - R^+,\ \delta R^- = \overline{R^-} - R^-,$$

它们有可能为空集。

当 (M,φ) 没有极限分界线时，$\delta R^+(\delta R^-)$ 上任一常点对于 $R^+(R^-)$ 是**可达的**，即它是流的某一闭的局部截痕的终点。但若 (M,φ) 有极限分界线，则不一定。例如，若一螺域中某一轨线 γ 被外加一奇点 P，则此螺域便成为带域，后者的边界除了包含前者的边界以外，还含有奇点 P 以及 γ 被 P 分割而成的两条轨线 γ_1 与 γ_2。γ_1 以 δR^- 为其极限分界线，γ_2 以 δR^+ 为其极限分界线。这时 δR^+ 和 δR^- 上的任一常点对于带域来说都是**不可达点**(图 7.2)。

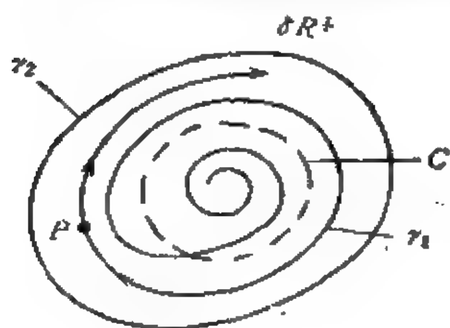


图 7.2

当 M 为可定向流形时，δR^+（或 δR^-）的非奇点部分可以借流的正向而排序。例如，设 R 为带域，$p, q \in \delta R^+$ 是两个常点，则定义

$$\gamma(p) < \gamma(q)$$

(意即 $\gamma(p)$ 在 $\gamma(q)$ 之前)当且仅当 $\gamma(p) \neq \gamma(q)$，并且对于以 p, q 为端点的两条局部截痕 I_p 与 I_q，φ 的位于 R^+ 中的轨线当 t 增加时先遇 I_p，再遇 I_q (图7.3)。当 R 为环域或螺域时，可以先固定 δR^+（或 δR^-）上一条分界线作为第一条，然后按前法规定第二条，第三条，…

下面描述几种只有一个典型域的连续流的标准拓扑结构，然

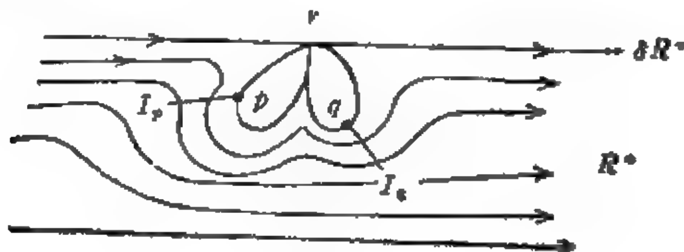


图 7.3

后再证明流形上一般的连续流的任一半典型域的闭包必定等价于这种标准半典型域。

I. 带域

设 S 是 R^2 中一闭的铅直带域，以直线 $L_0:\{x=0\}$ 与 $L_1:\{x=1\}$ 为边界。以 J 记 L_1 上一开子集，它的余集 L_1-J 是空集，L_1，或一全不连通集(易见，当 L_1-J 为全不连通无限集时，则 J 由无限多个开区间构成)。设 $u:S\to[0,1]$ 是一C^∞ 函数。它在 L_0 上取值 1，而在 L_1-J 上取值 0。记 $\check{S}=S-L_1+J$，则由 $\overline{V}(p)=(0,u(p))$ 所定义的向量场 $\overline{V}:\check{S}\to R^2$ 属于 C^∞。L_1-J 中的每一点都是 $\overline{V}$ 的奇点，又 $\overline{V}$ 中每一向量都是铅直向上的。此向量场的流 $(\check{S},\varphi)$ 以 $\check{S}$ 为一带状典型域，$\check{S}$ 的每一边界连通支都是一条分界线。以 $\{J_i\}_{i\in I}$ 表 J 中诸线段的排序，指标集 I 可能为空集，有限集或可数无限集。以 ω 记流 $(\check{S},\varphi)$ 在 $\{J_i\}_{i\in I}$ 上导出的全序。我们称 $(\check{S},\varphi)$ 是 ω 型的标准半带域。

II. 环域

设 A 表示 R^2 中由圆 $C_1:\{r=1\}$ 与 $C_2:\{r=2\}$ 所围成的闭环域。J 是 C_2 的某一开子集，余集 C_2-J 为空集，C_2，或全不连通集。取一C^∞ 函数 $u:A\to[0,1]$，它在 C_1 上取值 1，在 C_2-J 上取值 0。由 $\dot{r}=0$，$\dot{\theta}=u$ 定义的，$\check{A}=A-C_2+J$ 上的 C^∞ 流记为 ϕ。$(\check{A},\phi)$ 有唯一的环状典型域。固定 C_2 上的分界线集合 $\{J_i\}_{i\in I}$ 中的某一 J_i 作为第一条，假设此集上的全序为 ω。由于 J_i 的选取是任意的，故 $\{J_i\}_{i\in I}$ 可以有多种不同的全序，我们认为他们都是彼此等价的，以 ω_c 记这一等价类。称 $(\check{A},\phi)$ 为 ω_c 型的标准半环域。注意，当 J 为空集或整个 C_2 时，按照环域中轨线的不同定向，仍有两个不同的等价类。

III. 螺域

仍以 A 记 II 中那个闭环域，以 J^- 与 J^+ 分别记 C_1 与 C_2 的

开子集，记 $K^-=C_1-J^-$，$K^+=C_2-J^+$。设 $K^\pm$ 或为空集，或为 C_i，或为全不连通集。在 $\check{A}=A-(K^-\cup K^+)$ 上有两类不同的连续流，$(\check{A},\phi)$ 称为是可定向的，如果 ϕ 在 $J^\pm$ 上所导出的定向与 $\check{A}$ 的某一定向一致(图 7.4)，否则，称为不可定向的。但若 J^+ 或 J^- 为空集，则只有一类连续流。

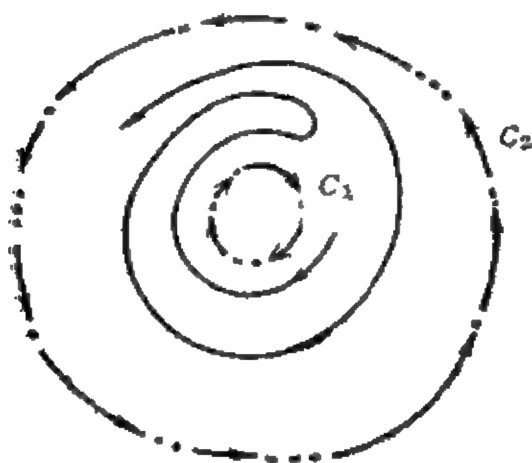


图 7.4

IV. 环面域

因为环面上一切有理流都彼此等价，故只有一个等价类。

其次，我们要证明：可定向二维流形 M 上的，无极限分界线的连续流 φ，限制在任一半典型域的闭包上的时候，必定和上述几种标准典型域之一等价。

I'. 带域

设 R 是 $(\check{M},\varphi)$ 的一个带状典型域，$\check{M}$ 表示从 M 除去 φ 的一切奇点而得到的子流形。R^- 与 R^+ 是 R 的两个半带域，有公共边 $\gamma(x)$，$x\in R$。ω 表示流 φ 在 ∂R^+ 的分界线集合 $\{H_i\}_{i\in I}$ 上所导出的全序。设 $(\check{S},\phi)$ 是型为 ω 的标准半带状典型域.就是说，L_1 上的分界线集合 $\{J_i\}_{i\in I}$ 以 I 为指标集合，且 ϕ 在 $\{J_i\}_{i\in I}$ 上所导出的全序也是 ω，如果把 H_i 和 J_i 等同的话。

引理 2. 存在一等价关系 $h:(\check{S},\phi)\to(\bar{R}^+,\varphi)$，且 h 可如此选取，使它是 $(\partial\check{S},\phi)$ 与 $(\partial R^+,\varphi)$ 的任一保序等价关系的拓广。

证. 由于 $(\check{S},\phi)$ 与 $(\bar{R}^+,\varphi)$ 都是 ω 型的，故必存在 $(\partial S,\phi)$ 到 $(\partial R^+,\varphi)$ 上的一个保序等价关系 h。今设 $\{d_n\}_{n>0}$ 是 $\bigcup_{i\in I}J_i$ 中的一个可数稠密点集，而 $d'_n=hd_n$。设 A_0 是 ϕ 的一条水平横截线，它的右端点为 d_0，左端点是 $p_0\in L_0$。以 A'_0 记 φ 在 $\bar{R}^+$ 中的.从

$p'_0 = hp_0$ 到 d'_0 的横截线。我们可以拓广 h，使 $h(A_0) = A'_0$。现在再作 ψ 的可数无限多条互不相交的截痕 $\{A_n\}_{n>0}$，使之满足以

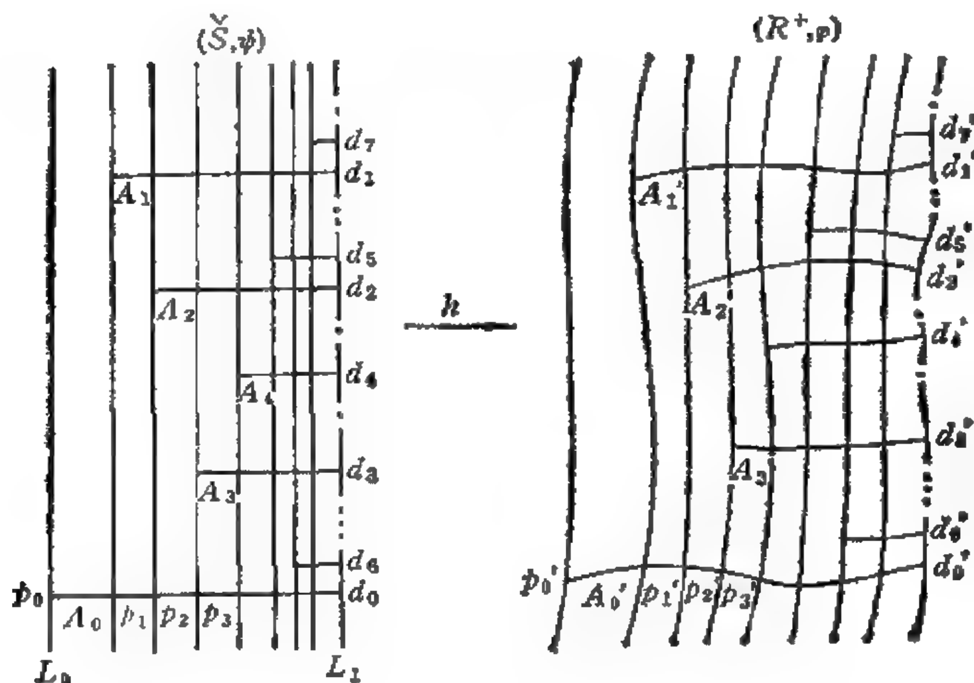


图 7.5

下的三个条件：

1）A_n 的右端点是 d_n；

2）如果 A_n 的左端点在 $\gamma(p_n)$ 上，且 $p_n \in A_0$，则 $\{p_n\}$ 单调地收敛于 d_0；

3）$\operatorname{diam}(A_n) \to 0$。

类似地，我们可以在 $\overline{R^+}$ 中作 φ 的互不相交的截痕 $\{A'_n\}_{n>0}$，其左端点在 $\gamma(p'_n)$ 上，$p'_n = hp_n$；右端点为 d'_n，且 $\operatorname{diam}(A'_n) \to 0$。显见，$A_n$ 与 $\gamma(p_n)$ 的全体把 $S - L_1$ 剖分成为无数多个 2 维胞腔（有的是无限长的），它们是局部有限的，并且收敛于 L_1。而 A'_n 与 $\gamma(p'_n)$ 则给出一个与此同胚的，R^+ 的剖分。因此，只要把 h 如此拓广，使能把 $S - L_1$ 的每一个 2 维胞腔映到对应的 R^+ 的 2 维胞腔，我们就得到 $(\check{S}, \psi)$ 到 $(\overline{R^+}, \varphi)$ 上的一个等价关系了。这种拓广在 $\partial\check{S}$ 上的连续性是明显的。

II'. 环域

与前类似，环状典型域 R 被其中一条闭轨 γ 分成两个半环域 R^- 与 R^+。设 φ 在 ∂R^+ 上的分界线集合 $\{H_i\}_{i\in I}$ 上所诱导出来的循环顺序为 ω_c 型，而 $(\check{A}, \phi)$ 是 ω_c 型的标准半环域。则仿前可证：

引理 3. 存在一等价关系 $h:(\check{A},\phi)\to(\overline{R^+},\varphi)$，且 h 可以如此选取，使它是 $(\partial\check{A},\phi)$ 与 $(\partial R^+,\varphi)$ 的任一保序等价关系的拓广。

III'. 螺域

对螺状典型域 R，设 C 是 R 中的一条单闭曲线截痕。$R^+ = C\times[0,\infty)$，$R^- = C\times(-\infty,0]$。设 $\omega_c^-(\omega_c^+)$ 是 $\partial R^-(\partial R^+)$ 上的分界线集合的循环顺序，而 $(\check{A},\phi)$ 是一个 (ω_c^-,ω_c^+) 型的标准螺域。那么如前可证：

引理 4. 存在 $\check{A}$ 到 $\bar{R}$ 上的映射 h，它把 ϕ 的轨线保持定向地映到 φ 的轨线，且是 $\overline{C\times[0,\infty)}$ 到 $\bar{R}^+$ 上和 $\overline{C\times(-\infty,0]}$ 到 $\overline{R^-}$ 上的同胚。此外，h 可以如此选取，使它是 $\partial\check{A}$ 到 ∂R 上的任一保序等价关系的拓广。

下面研究可定向二维流形 M 上的连续流 φ 的拓扑分类问题。在 §1 中我们已经看到轨道空间 M/φ 的拓扑类型不能完全刻划 (M,φ)，因此有必要引进轨道复形 $K(\varphi)$ 的概念，它包含下列一些内容：

A. 胞腔结构

设 $\pi: M\to M/\varphi$ 是自然投影，则每一典型域 R 的象是 $K(\varphi)$ 的一维胞腔。当 R 是带域或环域时，此一维胞腔是开弧；当 R 是螺域或环面域时它是单闭曲线。我们依次称之为开或闭的一维胞腔。φ 的每一分界线的象是 $K(\varphi)$ 的一个零维胞腔。(以后分别简记为 1 胞腔与 0 胞腔。)

B. 纤维类型

$K(\varphi)$ 的每一 i 胞腔 ($i=0, 1$)，根据其上一点的纤维的拓扑类型又可以有线 i 胞腔，圆 i 胞腔或点 i 胞腔之分(但没有点 1 胞腔)。

C. 顺序结构

首先，对于 $K(\varphi)$ 的与半典型域的边界上的非奇点分界线相对应的任二线 0 胞腔，我们规定它们之间的顺序，使之与在 π^{-1} 之下两分界线之间的顺序一致。然后按下法拓广这种顺序到点 0 胞腔去：设 $\bar{p}=\pi p$ 是一个点 0 胞腔，$\bar{q}=\pi(q)$ 是一个线 0 胞腔，则规定：

$\bar{p}<\bar{q}$ 当且仅当 $p\in\alpha(q)$；$\bar{p}>\bar{q}$ 当且仅当 $p\in\omega(q)$。[1]

设 C 是螺域 R 的一条单闭曲线截痕，记 $\pi(R)=\bar{C}$ 为 $K(\varphi)$ 中的闭 1 胞腔。设 c 是 C 上一点，而 $p\in\partial R$，我们规定：

$\bar{p}<\bar{c}$ 当且仅当 $p\in\alpha(c)$，$\bar{p}>\bar{c}$ 当且仅当 $p\in\omega(c)$。

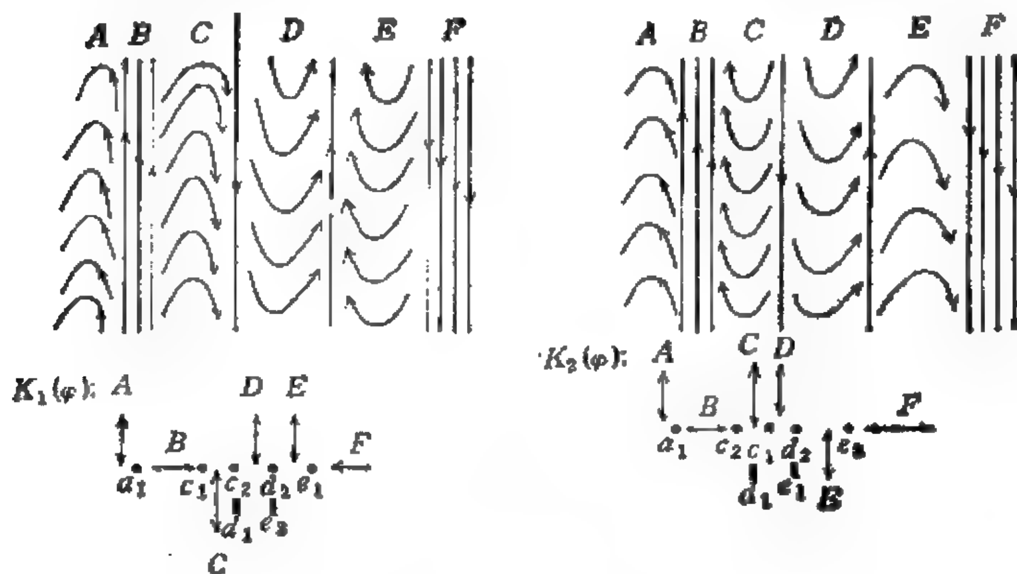


图 7.6

1) [58]中没有考虑到图 7.3 中 ∂R^+ 上的分界线其 $\alpha(x)$ 与 $\omega(x)$ 都是同一个奇点 r 的情况。这时我们只好把 r 看成三点 r_1, r_2, r_3，使 $r_1<\bar{p}<r_2<\bar{q}<r_3$。

D. 螺域的可定向性

与螺状典型域R对应的闭1胞腔称为是可定向的（或不可定向的），如果R本身是可定向的(或不可定向的).

例. 如图7.6所示，左右两个平面无奇点动力系统的轨道空间的拓扑结构相同，虽然它们本身的拓扑结构在区域C和E中不一样.为了显示这一点，在两个轨道复形 $K_1(\varphi)$ 与 $K_2(\varphi)$ 中标出线0 胞腔间的不同的顺序结构。 在 $K_1(\varphi)$ 中有 $c_2=d_1$, $d_2=e_2$, 而在 $K_2(\varphi)$ 中则有 $d_1=c_1$, $d_2=e_1$.

注意：虽然在上例中这种极简单的情况我们可以用线与点的上下，左右位置不同，以及一些带下标的文字把 $K_1(\varphi)$ 与 $K_2(\varphi)$ 以及两者之间的区别形象地表示出来，但在绝大多数(有时甚至是极简单的)情况之下，$K(\varphi)$ 的结构特性仍只能用文字来描述，象我们在§2中对图2.2所说的那样。

定义5. 两个轨道复形 $K(\varphi_1)$ 与$K(\varphi_2)$ 称为同构，如果存在一同胚 $k:K(\varphi_1)\to K(\varphi_2)$，它把 $K(\varphi_1)$的胞腔映到 $K(\varphi_2)$ 的胞腔上，并且保持纤维类型，可定向(或不可定向)性以及顺序结构。

定理1. 设 φ_1, φ_2 分别为可定向二维流形 M_1, M_2上的连续流，它们只有孤立奇点而无极限分界线，则 φ_1 与 φ_2 为拓扑等价当且仅当 $K(\varphi_1)$ 与 $K(\varphi_2)$ 为同构。

证. 设 $k:K(\varphi_1)\to K(\varphi_2)$ 为一同构。 以 S_1, S_2 表两动力系统的非奇点分界线的和集。显见存在等价关系：$k':(S_1,\varphi_1)\to(S_2,\varphi_2)$。这里没有连续性的问题，因为$S_1$与$S_2$都是一些离散线段与单闭曲线的集合。

然后按照引理2—4知可把k'拓广到每一个典型域去，于是就得到$(\check{M}_1,\varphi_1)$到$(\check{M}_2,\varphi_2)$的等价关系. 最后定义 $kp=\pi_2^{-1}k\pi_1 p$ 对 (M_1,φ_1) 的每一奇点 p，即得 (M_1,φ_1)到(M_2,φ_2) 上的等价关系.

对 M_i 为不可定向二维流形的情况，可以借助于覆盖空间 $\hat{M}_i$ 上的连续流之间的拓扑等价而导出与定理1同样的结论，证明从

略。

下面研究有有限条分界线，但可能有极限分界线的闭二维流形上连续流的拓扑分类问题，一切结构稳定流都属于这个范畴。由图 7.2 知道这种连续流的典型域的边界点有可能是不可达的。由于分界线只有有限条，故不存在 P^+ 及 P^- 式稳定的非闭轨线，从而由 §6 定理 11 知道极限分界线是有限条闭轨，或其 ω 及 α 极限集都是单一的奇点的开弧。

引理 5. 设 x 不是奇点，$x\in\omega(y)$（或 $\alpha(y)$），且 $\gamma(y)$ 是分界线，则 $\gamma(y)$ 是某一带状半典型域的可达边界中的最后（或最先）一条分界线。

证. 取流的一条过点 x 的局部截痕 T，则 $\gamma(y)$ 应与 T 无数次相交。T 上至多有可数无限个点位于分界线上，且 $\gamma(y)$ 与 T 的每一交点必为某一余区间的端点。由此可见，$\gamma(y)$ 必为某一典型域 R 的可达边界的一部分，并且 x 也在 R 的边界上。

R 不能是螺域。否则，设 C 是 R 的一单闭曲线全截痕，则在 $\gamma(y)$ 与 T 的任二相继交点之间应含 $\gamma(y)$ 与 C 的一交点。由于 $x\in\omega(y)$，故 $x\in\bar{C}$，不可能。

R 也不能是环域，否则 x 将属于 R 中任一闭轨的闭包，不可能。因此，R 必为一带域，且易见 $\gamma(y)$ 是 R^+（或 R^-）的可达边界中的最后（或最先）一条分界线，如果 $x\in\omega(y)$（或 $\alpha(y)$）。

引理 6. 设 $\gamma(x)$ 是 (M,φ) 的一条分界线，它的 ω（或 α）极限集 G 所含不止一点，则：

1） G 有一闭邻域 U，使 $U-G$ 的每一连通支是一半开环域；

2） $U-G$ 不含奇点与闭轨；

3） $U-G$ 的每一边界分支都是 φ 的单闭曲线截痕；

4） 若 R 是一典型域，其边界含有 $\gamma(x)$，C 是 R 的截痕，则必存在一实数 T，使 $C\times[T,\infty)$（或 $C\times(-\infty,T]$）包含在 $U-G$ 的某一连通支中。

例. 如图 7.7，G 为一 8 字形，$U-G$ 有三个连通支。$\gamma^+(x)$ 含在 G 外部的那个连通支中。

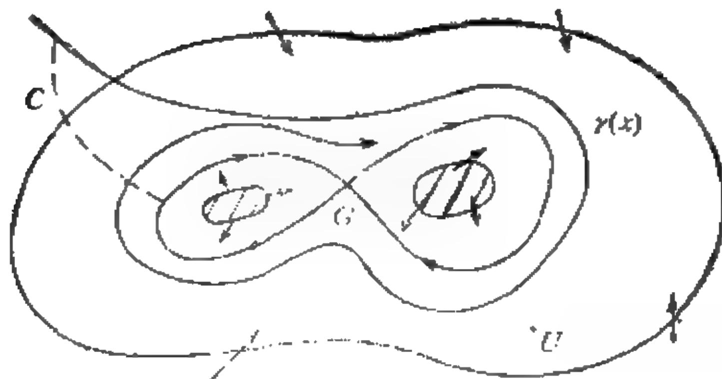


图 7.7

证. 由假设知G是一闭轨，或是由有限条线轨道和奇点所构成的连通有限图。根据 PL 拓扑中的熟知的定理即知G在流形M中有一正规邻域 U,且 $U-G$ 的每一连通分支是一半开环域[1]. 当U取得足够小时,引理中的条件 1)，2) 显然能够满足. 为了证明 3)，可用通常平面定性理论中构造环域的技巧. 4) 的证明极易，因为每一半环域的边界都是无切弧.

由此引理可见：在 U-G 的任一连通支的闭包中，流φ有一半螺状典型域. 从每一连通支的开边界上可能有(有限条)分界线进入此连通支中.图 7.7 中的 $\gamma(x)$就是这样的一条分界线.并且我们可以如此选取等价关系，使之能把边界截痕上的一个已给的有限循环排序子集(即诸分界线与此边界的交集)保持顺序地映到另一对应的边界截痕上的同类子集上去.

轨道复形 $K(\varphi)$ 可如前一样地定义,但要补充一句：如果G是分界线 $\gamma(x)$ 的非奇点极限集,则G或为一周期轨线,或包含一些开轨线弧及其极限点. 在后一情况，这些开轨线借流的定向而循环排序,象在螺状典型域的边界上一样.

现在注意，若G是一带状域R的边界上某一分界线的ω极限集,则可用一连接 $\overline{R^+}$ 与 $\overline{R^-}$ 的最后一条分界线的截痕(当进入G的这一半邻域中的分界线只有一条,象图 7.7 中所给的那样，则此

1) 这里指的是"环域定理"中的环域,不是定义 1 中所说的环域.

截痕便是引理 6的3)中所说的 $U-G$ 的那一边界分支)来截R,可得截去一头的带域 R'。这时 R 的另一端可能未被削去,也可能被削去。我们把 $\bar{R}$ 被截痕来和极限分界线分开的部分称为截头带域。

定理 2. 设 φ 与 φ' 分别为紧的可定向二维流形 M 与 M' 上的连续流，各有有限条分界线，则 φ 与 φ' 为拓扑等价当且仅当 $K(\varphi)$ 与 $K(\varphi')$ 为同构。

证. 设 $k: K(\varphi) \to K(\varphi')$ 为一同构。如果没有极限分界线,则等价性可由定理 1 知之。今设 $\mathfrak{L}(\mathfrak{L}')$ 为 $\varphi(\varphi')$ 在 $M(M')$ 中的极限分界线的和集。由 k 可导出等价关系 k^*

$$k^*: (\mathfrak{L}, \varphi) \to (\mathfrak{L}', \varphi').$$

由于$\mathfrak{L}$是一些轨线弧与单闭曲线的离散集合,故连续性没有问题。今对 $\mathfrak{L}$ 的每一连通支G取一满足引理 6 中的要求的邻域 U,对于 M' 中的对应集 G' 亦取一相应的邻域 U'. $U-G$ 的每一半开环域连通支，包含一分界线半轨，且以G的全部或一部分作为其极限集者,可借一等价关系映到 $U'-G'$ 的那个对应的半开环域.自然可以如此选取这种等价关系,使分界线半轨映到分界线半轨.设 $V(V')$ 为 $M(M')$中此种邻域的和集。我们已经拓广 k^* 成为一等价关系

$$k_1: V \to V'.$$

M 的余下部分则被分解为一些闭典型以及截头带域的和集.象在定理 1 中一样,我们可以拓广 k_1 成为一等价关系

$$k_2: (M, \varphi) \to (M', \varphi'),$$

即先拓广到一切典型域,最后再拓广到奇点的集合,定理证毕.

对于不可定向流形上有极限分界线的动力系统也可证得类似的结果.

应用典型域的概念以及拓扑等价性定理,[58] 中还给出许多有趣的应用。例如,他们证明了:

定理 3. 设 φ 是 C^∞ 可定向二维流形 M 上的连续流,只有孤立奇点,没有极限分界线,则 φ 等价于 M 上一 C^∞ 流 φ'.

证明从略。但应注意在此定理中不能改 C^∞ 为解析，因为解

析系统趋向孤立奇点的轨线只能沿着有限个方向，除了星形结点以外，而一般 C^∞ 流则不受此限制.

下面介绍[58]中用典型域对另外两个古典定理的新证明。

定理 4 (El'sgolz 关于 Morse 不等式[1]的推广)。 设 φ 为闭二维流形 M 上的连续流，只有简单奇点与离散的非游荡点集合，则

$$\beta_i(M) \leqslant \eta_i(\varphi) \qquad (i = 0,1,2). \tag{4}$$

这里简单奇点是指稳定、负向稳定或鞍点. $\eta_0(\varphi)$, $\eta_1(\varphi)$, $\eta_2(\varphi)$ 分别表示 φ 的负向稳定、鞍点与正向稳定奇点的个数，$\beta_i(M)$ 表示 M 的 i 维 Betti 数。

证. 先设 M 为可定向. 因为 φ 至多有有限个奇点，都是简单的，所以至多有有限条分界线. 由于 φ 没有周期轨道，故无环域与环面域. 又螺域不能有非退化的分界线与高阶奇点在它的边界上，故若出现螺域，则它只能是 S^2 上一对奇点的余集。此时有

$$\beta_0(S^2) = \beta_2(S^2) = 1, \ \beta_1(S^2) = 0;$$
$$\eta_0(\varphi) = \eta_2(\varphi) = 1, \ \eta_1(\varphi) = 0,$$

故定理的结论成立。

因此，不妨设 M 被分界线分解为 n 个带域，因为除了前段所说的那个特殊情况以外，由引理 1 知道必有分界线存在. 现在不妨取一带域 R_i 的闭包的模型为一闭圆盘 D_i，它的边界上奇点个数与边数一样多，设有 $\mu(i)$ 个奇点和 $\mu(i)$ 条边。带域内的一切轨线都从一奇点 a 跑向另一奇点 b (如果 $a = b$，则这时带域就是 Bendixson 指标定理中的椭圆域从而 a 不是简单奇点了)。因此这些 D_i 就给出 M 的一个胞腔分解。若 $\alpha_i (i = 0, 1, 2)$ 表示 i 胞腔的个数，则有

$$\alpha_0 = \eta_0 + \eta_1 + \eta_2, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu(i), \quad \alpha_2 = n.$$

这里第二个等式右边有 $\frac{1}{2}$ 这个因子，因为每个带域的任意一条边

---

1) Morse 不等式的内容参见 [4].

都计算了恰好两次。

现在注意，D_i 在其 $\mu(i)-2$ 个顶点处有双曲域，在一端有一稳定抛物域，另一端有不稳定抛物域，故有

$$\eta_1=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(\mu(i)-2)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\mu(i)-\frac{n}{2},$$

$$\eta_0\geqslant 1,\ \eta_2\geqslant 1.$$

于是 M 的 Euler 特征可表为

$$\begin{aligned}\chi(M)&=\beta_0-\beta_1+\beta_2=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2\\&=\eta_0+\eta_1+\eta_2+n-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu(i)\\&=\eta_0-\eta_1+\eta_2,\end{aligned}$$

从而

$$\eta_1-\beta_1=(\eta_0-\beta_0)+(\eta_2-\beta_2),$$

但已知 $\beta_0=\beta_2=1$，故有

$$\eta_0\geqslant\beta_0,\ \eta_2\geqslant\beta_2,\ 从而\ \eta_1\geqslant\beta_1.$$

若 M 为不可定向流形，设 $(\widetilde{M},\tilde{\varphi})$ 为 (M,φ) 在二重覆盖可定向流形 $\widetilde{M}$ 中的提升。设 $\tilde{\eta}_i,\tilde{\beta}_i$ 为 $(\widetilde{M},\tilde{\varphi})$ 的对应于 η_i,β_i 的数，则

$$\tilde{\beta}_0=\beta_0=1,\ \beta_2=0,\ \tilde{\beta}_2=1,\ \tilde{\eta}_i=2\eta_i\quad(i=0,1,2).$$

由于 η_i 为非负整数，故 $\eta_0\geqslant\beta_0$，$\eta_2\geqslant\beta_2$ 显然成立。再由 $\chi(\widetilde{M})=2\chi(M)$ 得

$$\tilde{\beta}_0-\tilde{\beta}_1+\tilde{\beta}_2=2-\tilde{\beta}_1=2(\beta_0-\beta_1+\beta_2)=2-2\beta_1,$$

从而 $\tilde{\beta}_1=2\beta_1$。于是由 $\tilde{\eta}_1=2\eta_1\geqslant\tilde{\beta}_1=2\beta_1$ 即得 $\eta_1\geqslant\beta_1$。定理得证。

定理 5 (Poincaré 的指标定理)．设 φ 是闭二维流形 M 上的连续流，有有限条分界线，则

$$\sum_i \operatorname{ind}(O_i)=\chi(M)=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2.$$

首先研究当 M 被分界线分割为若干个典型域时奇点的椭圆

域，双曲域的个数与典型域的个数之间有什么关系。如定理4的证明中那样，不妨取一闭圆盘作为典型带域的闭包的模型。设(D_i, ϕ_i) $(i = 1, \cdots, n)$ 是所有的典型带域闭包的模型。如前所述，在一般情况下，∂D_i 在一个顶点处有不稳定抛物域，在另一个顶点处有稳定抛物域，而在其余奇点处有双曲域。但在特别情况下，前两个顶点可以重合，于是在该处出现一个椭圆域。今以$\mu(i)$ 表示 ∂D_i 上奇点的个数。假设椭圆域出现在 $i = 1, 2, \cdots, e$ 时。于是，对于 $i \leqslant e$, D_i 在一个顶点有椭圆域，在 $\mu(i) - 1$ 个奇点有双曲域。对 $i \geqslant e + 1$, D_i 在两个顶点有抛物域，在 $\mu(i) - 2$ 个奇点有双曲域。

次设 $A_1, \cdots, A_m$ 为环域及螺域的闭模型。设对 $i = 1, 2, \cdots, d$, ∂A_i^+ 由唯一奇点构成，就是说，$A_1, \cdots, A_d$ 是圆盘，而对 $i \geqslant d + 1$, A_i 的两个边界分支都含有非奇点的分界线[1]。以$\eta(i)$ 记 ∂A_i 上的奇点个数，则对 $i \leqslant d$, A_i 在 $\eta(i) - 1$ 个奇点处有双曲域，而对 $i \geqslant d + 1$, $A(i)$ 在 $\eta(i)$ 个奇点处有双曲域。

今设 P 是 M 上流 φ 的一个奇点，可能有许多 D_i 与 A_i 的边界上都含有奇点P。以 $\sigma(P)$ 记 P 点的椭圆域个数，$\nu(P)$ 记 P 点的双曲域的个数。熟知的是流 φ 在奇点 P 的指标为

$$\operatorname{ind}(P) = 1 + \frac{\sigma(P) - \nu(P)}{2}.$$

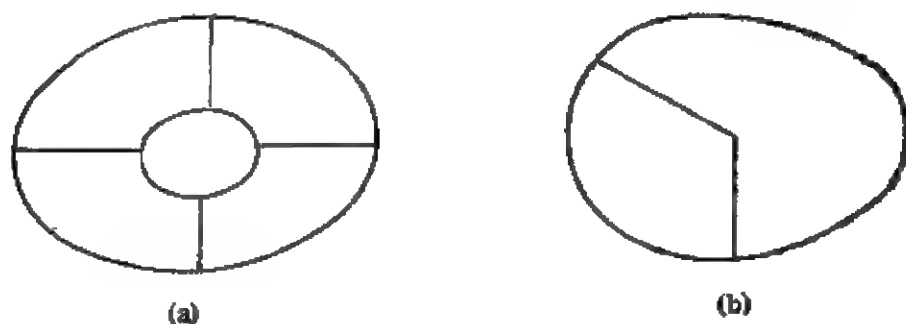
定理5的证明：

先设M为可定向。若M仅由单一的环面域，螺域或环域构成，且恰有两个奇点时，定理显然成立。因此不妨设M上既有 $D_1, \cdots, D_n$，又有 $A_1, \cdots, A_m$。今设M的一个胞腔分解如下：

由于在一正常轨道上添加一奇点Q时α_0与α_1都增加1，故$\chi(M)$不变；另一方面，$\sigma(Q) = 0$, $\nu(Q) = 2$, $\operatorname{ind}(Q) = 0$，故 $\sum_i \operatorname{ind}(Q_i)$ 也不变。因此不妨设每一 $A_i (i \geqslant d + 1)$ 在其每一边界连通支上至少有两个奇点，且其两边界分支上的奇点个数相

1) 特殊情况，当 A_i 为整个 S^2，南北极为其边界奇点时，定理显然成立。

同．现在加进一些连接不同边界上奇点的1胞腔，就可以把一切这种 A_i 分解为一些2胞腔了（图7.8(a)）．对 $i \leqslant d$，则添加两个1胞腔，它连接内部的唯一奇点与外边界上某两奇点，这样就够了(图7.8 (b))．



(a)　　　　(b)

图 7.8

现在容易得到等式：

$$2\alpha_1 = \sum_{1}^{n} \mu(i) + \sum_{1}^{d} (\eta(i) + 1) + 2 \sum_{d+1}^{m} \eta(i),$$

$$2\alpha_2 = 2n + 2d + \sum_{i=d+1}^{m} \eta(i).$$

因为对于 $A_1, \cdots, A_d$，边数 = 奇点数 + 1；而对于 $A_{d+1}, \cdots, A_n$，奇点数 $= \frac{1}{2} \times$ 边数 $= 2 \times$ (2胞腔数)．

另一方面，椭圆域共有 e 个，双曲域共有 h 个，

$$h = \sum_{i=1}^{e} (\mu(i) - 1) + \sum_{i=e+1}^{n} (\mu(i) - 2)$$

$$+ \sum_{i=1}^{d} (\eta(i) - 1) + \sum_{i=d+1}^{m} \eta(i).$$

于是

$$2 \sum_{i} \mathrm{ind}\,(O_i) = 2\alpha_0 + e - h = 2\alpha_0 + e$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \mu(i) + e + 2(n - e) + d - \sum_{i=1}^{m} \eta(i)$$

$$= 2\alpha_0 + 2n + d - \sum_{i=1}^{m} \mu(i) - \sum_{i=1}^{m} \eta(i).$$

另外，

$$2\chi(M) = 2(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_0 - \sum_{i=1}^{m} \mu(i)$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \eta(i) + d + 2n,$$

因此

$$\chi(M) = \sum_{i} \operatorname{ind}(O_i).$$

定理证毕。

前已提及，由于在[58]中或是假定没有极限分界线，或是假定分界线只能有有限条，因而无法研究二维流形上有非闭P式稳定轨线，复合极限环，中心焦点，或象图7.1所示的那种轨线的动力系统。为了补救这一缺点，[60]详细研究了非奇点分界线的三种可能类型——1)不属于环域和环面域的闭轨，2)非闭的P式稳定轨线，3)正向或负向极限集同为唯一奇点的渐近轨线——的拓扑性质，又拓广了[58]中的四种典型域为七种广义典型域，其中简单带域、半螺域、环域和环面域或与[58]中一致，或较[58]中相应的典型域含义更广。另外还增加了中心域(类似于复合极限环或中心焦点的邻域)，非闭P式稳定轨道闭包域和管状域。最后在动力系统只有孤立奇点的假定之下证明了类似于定理1的分类定理，因篇幅关系，此处从略，请读者参看原文。由于在§3中我们已经介绍了 Markley 关于有例外极小集的环面流的拓扑分类问题，我们认为在[60]中当非闭P式稳定轨线的闭包为无处稠密时，不应把它看做典型域，而应把整个闭包看成分界线的集合，这样也许更妥当一些。

关于一般情况下曲面动力系统的拓扑等价问题还有 C. X. Арансон 等的许多著作[62]，[63]，[64]，[65]可以参看，此处亦从略。此外，[66]还研究了环面上有一个奇点的动力系统的轨线的拓扑分类问题。

§ 8. 环域定理与奇点概念的推广

在进一步研究二维流形上动力系统的另一重要问题——周期解的存在性以前，我们先来介绍平面定性理论中熟知的环域定理的推广：当环域中含奇点时和当环域被改为一般的多联通区域时，以及奇点概念的推广。事实证明，这二者对于研究二维流形上闭轨与奇闭轨的存在性所起的作用恰如环域定理在平面定性理论中所起的作用一样。

我们知道，Poincaré 的环域定理早在 1901 年就被 I. Bendixson 所推广，成为研究平面有界区域中轨线的 ω 极限集的理论，通常称为 Poincaré-Bendixson 理论．后来该理论又被 A. J. Schwartz 推广到二维可定向 C^2 流形上的 C^2 流去，已见于前几节。另一方面，A. M. Ляпунов 关于平衡点的稳定性、渐近稳定性和不稳定性的概念，以及判别这些稳定性的 Ляпунов 第二方法最迟在 1950 年之前已被推广到一般度量空间中动力系统的有界闭不变集去了。奇怪的是，当环域中存在奇点，而其它条件不变时，环域中是否仍存在闭或奇闭轨线？以及 Bendixson 关于平面定常系统的奇点的指标公式（见 § 7 定理 5 的证明）是否可以推广到有界闭不变集中去？这些简单的问题在作者和马知恩的 [67]（完成

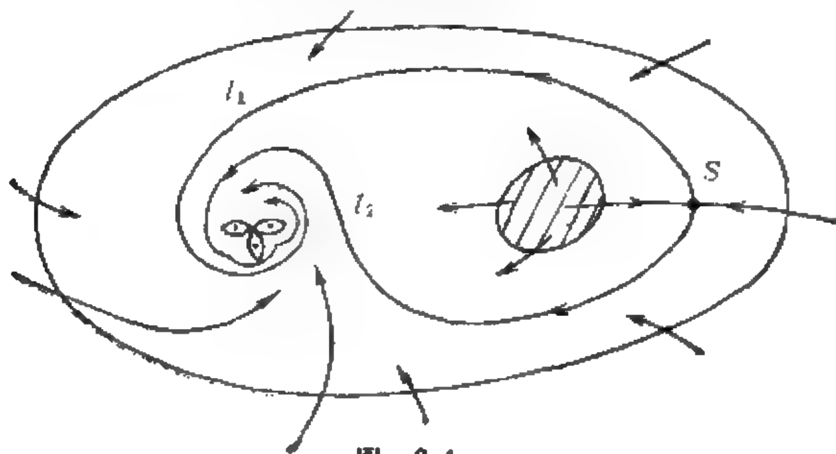


图 8.1

于 1965 年，发表于 1977 年）发表以前却没有被人研究过。

应注意，要想研究环域定理在平面多联通区域中的推广，首先就得研究环域中含奇点的情况，因为当区域的连通数 $\geqslant 3$ 时，由奇点的指标定理知道：如果轨线与区域的边界都是横截相交的话，则此区域中必定存在奇点。由图 8.1 已可看出，当我们把环域定理中无奇点的假定除去以后，轨线的可能分布情况就会复杂得多。这时已不一定存在包含内境界线在其内部的闭轨线了。图 8.1 中所画的似乎是一条包含内境界线在其内部的奇闭轨线。但首先，它的上半部和下半部的、出发于鞍点 S 的分界线 l_1 与 l_2 的、ω 极限集都不是单一的奇点，而是一个形如　　的构图。其次，l_1 与 l_2 都是从右到左的。由此可见，若要在图 8.1 中肯定包含环域内境界线的奇闭轨线的存在性，我们必须既推广奇点的概念，使



可被看成一个广义奇点，又推广奇闭轨线的概念，使之适用于不可定向的情况。下面我们就先来做这两方面的推广工作。

设有方程组

$$\dot{x}=P(x,y),\quad \dot{y}=Q(x,y), \tag{1}$$

其中 P, Q 连续，且能保证满足任何初值条件的解的存在性和唯一性。又设方程在我们后面将要讨论的环域或多连通区域中只有有限个奇点。

下面先引进内外广义焦点和奇闭轨线的定义。

定义 1. 若一轨线 l 的 ω（或 α）极限集 $\Omega_l(A_l)$ 存在且有界，而 l 从外部盘旋逼近 $\Omega_l(A_l)$，则称 $\Omega_l(A_l)$ 为外广义焦点，并称 l 正向（负向）进入 $\Omega_l(A_l)$。如果 l 是从内部盘旋逼近 $\Omega_l(A_l)$，则称 $\Omega_l(A_l)$ 为内广义焦点[1]。

由此可知：1）通常意义下的焦点是外广义焦点的特例。有

1）当此定义被用到可定向曲面上轨线的 ω 极限集时，内外的概念只能是相对的，而对于不可定向曲面上轨线的、不同伦于零的极限集 L，则 L 只能是 Ω_l 或 A_l，而无内外之分了。

时我们也把结点看成外广义焦点。2)极限环既是外广义焦点，又是内广义焦点。3) 图 8.2 与 8.3 说明外广义焦点与内广义焦点可以相互包含而不一致(作为点集看待)。图 8.4 说明内广义焦点可以不是外广义焦点。当然,反过来的例子也是有的。

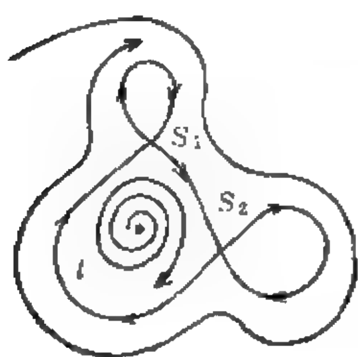


图 8.2

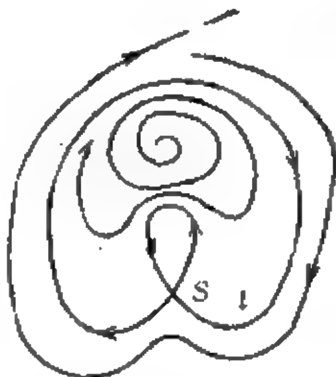


图 8.3



图 8.4

已知通常的焦点或结点的指标都是 $+1$，极限环内部的奇点指标总和也是 $+1$。今证广义焦点也具有同样的性质:

引理 1. 位于外广义焦点的境界上以及其内部的一切普通奇点的指标之和等于 $+1$。位于内广义焦点内部的一切普通奇点的指标之和也等于 $+1$。

证. 我们仅就外广义焦点来证明此引理,对于内广义焦点,证明是一样的。显然可见，不妨假定在所讨论的外广义焦点上既有常点又有普通的奇点,今在其上任取一常点 Q，过 Q 作方程(1)的轨线的外向横截线段 $\overline{QE}$ (图 8.5)。只要 $\overline{QE}$ 足够短,这种横截线段总存在。由向量场的连续性知道存在 Q 的 δ 邻域，使得对其中任意两点,由 (1) 在此两点所确定的向量的方向之差小于 $\frac{\pi}{4}$。不妨设这个外广义焦点是正向外稳定的。于是在 $\overline{QE}$ 上可以取到位于 δ 邻域中且与 Q 足够接近的常点 P，使得过 P 的方程 (1) 的轨线 l 当 t 增加时将从外部绕广义焦点一周后再次与 $\overline{QP}$ 交于一点 P'。今在 P 和 P' 邻近用位于 δ 邻域中的光滑弧段把 l 在 P 以后的弧和它在 P' 以前的弧分别与线段 $\overline{P'P}$ 光滑地连接起来，设连接点依次为 A，B，C，使得沿弧 $\widehat{ABC}$，其切线方向的改变量小于 π。

图 8.5

又不妨设由 $\overset{\frown}{ABC}$ 与 l 上的弧 $\overset{\frown}{CMA}$ 所构成的闭曲线 L 和广义焦点之间没有 (1) 的其它奇点。

今定义一新的向量场 V' 使它以 L 为闭轨线，于是 L 关于 V' 的指标为 $+1$。要知道 L 关于由 (1) 所定义的老向量场 V 的指标，只须查看当一点沿 L 走一周时新老向量场方向的改变量之差。

显见沿 l 上的 $\overset{\frown}{CMA}$ 段，V 与 V' 处处一致，而沿弧段 $\overset{\frown}{ABC}$，改变量之差或为 0，或为 2π 的非零整数倍。但由前面所说的可知后一情况不可能出现，从而沿着 $\overset{\frown}{ABC}$ 两向量场的方向改变量之差为零。因此，L 关于 V 的指标也是 $+1$。故由指标的性质知道：位于此外广义焦点的境界线上以及其内部的一切普通奇点的指标之和等于 $+1$，引理得证。

推论。位于内广义焦点上的以及它外部一切普通奇点的指标之和也是 $+1$。位于外广义焦点外部的一切普通奇点的指标之和也是 $+1$。[1]

注意：这里我们假设 (1) 可拓广为整个球面上的动力系统或半球面上的动力系统，使得对无限远奇点或赤道上的奇点可以定

1) 对于非球面的可定向闭曲面 M，此推论应按 M 的亏格而作相应的改动。

义指标，然后可以应用"球面上一切奇点的指标之和为2"的定理．本节以后都是这样假定的．

定义 2. L 称为奇闭轨线，如果它是由方程 (1) 的有限个奇点(其中某些可以是广义焦点)，以及有限条两端进入奇点的轨线所组成；并且当我们把 L 上的每一个广义焦点看成球面上一点时，L 是球面上的单闭曲线．

例 1. 图 8.1的奇闭轨线上有一个鞍点和一个外广义焦点．图 8.2 与 8.4 中的内广义焦点和图 8.3 中的外广义焦点也可看成奇闭轨线，但 8.2 中的外广义焦点和图 8.3 中的内广义焦点却不能看成奇闭轨线．由此可见，广义焦点与闭或奇闭轨线是两个互相独立的概念，虽然所讨论的是同一个点集．当称之为闭或奇闭轨线时，我们着眼于此点集本身在动力系统中的性质；当称之为外(内)广义焦点时，我们着眼于此点集在动力系统中相对于其外(内)邻域的性质．

例 2. 图 8.6 中给出的是一条奇特的奇闭轨线 L．它由一个鞍点 S，两条从鞍点出发而盘近一个内广义焦点 F 的螺线，以及 F 本身所构成．只有当 F 向外缩向无限远点时 L 才成为单闭曲线．此外，F 的内域被 L 分成两部分，我们可以随便称其中的一部分(如图 8.6 中的阴影部分)为 L 的内部，另一部分便称为 L 的外部．而 F 的外部区域现在只能称为广义焦点 F 的内部了．

定义 3. 设奇点 O 不是广义焦点，O 位于奇闭轨线 l 上，且 l

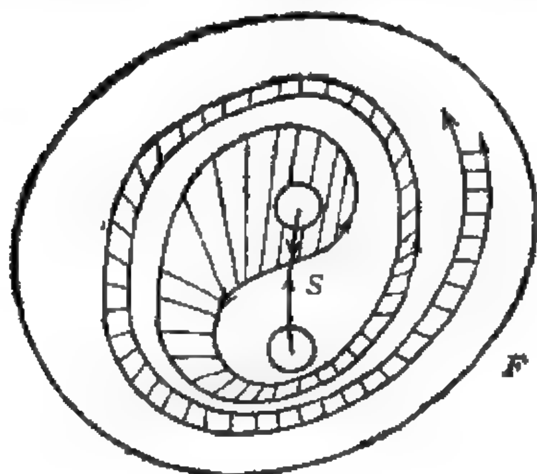


图 8.6

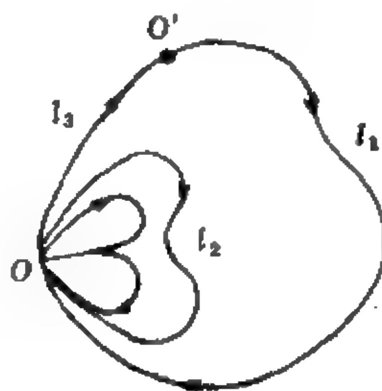


图 8.7

满足下面两个条件:

1) l 所围的区域内部不含奇点,但过其中任一点的轨线的两端都进入奇点 O。在 l 上除 O 以外可能还有其它奇点,但 l 上不同轨线的走向都是一致的。

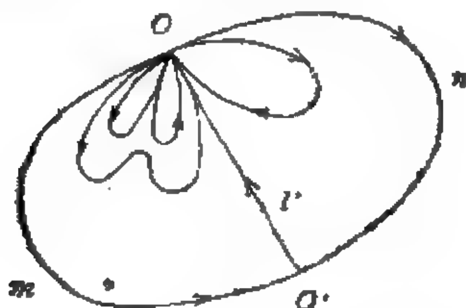


图 8.8



图 8.9

2) 不存在与 l 有相同性质的奇闭轨线 l',使 l 位于 l' 所包围的区域中.

则称 l 所围成的区域为奇点 O 的一个最大椭圆域。

例 3. 图 8.7 中的奇闭轨 $Ol_3O'l_1$ 内部是奇点 O 的一个最大椭圆域。图 8.8 中的奇点 O 有两个最大椭圆域,它们的边界有一条公共轨线 $l'=\overline{O'O}$,但 $OmO'n$ 是奇闭轨线,却不是 O 的最大椭圆域。O 点的最大椭圆域的边界上也可能不含任何其它奇点,例如图 8.9 中的 l 的内部便是 O 点的一个最大椭圆域。

以后凡说及奇点的椭圆域,我们所指的都是最大椭圆域。这样,对于奇点的椭圆域(从而双曲域)的个数就不会产生不同的计算方法,并且可以保证下述引理 2 前一段的性质5)成立[1]。凡说及双曲域与抛物域时,也是指最大椭圆域外部的这种区域。

定义 4. 设 O 是普通奇点,l 是一条跑进(或跑出) O 的抛物轨线,如果在不计抛物域的情况下,l 的两侧都是双曲域,则称 l 为 O 点的特殊分界线。

例 4. 图 8.10 与图 8.11 中的 l 与 l' 都是 O 点的特殊分界线;

1) 有时奇点的椭圆域可能有无数个之多,但可证明,与以此奇点为中心的圆相交的至多为有限个(见[13]第七章引理 8.2),从而每一奇点的最大椭圆域的个数也是有限的。

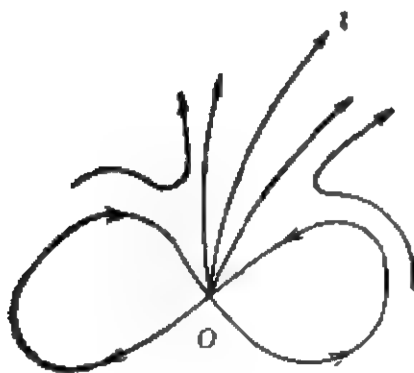


图 8.10

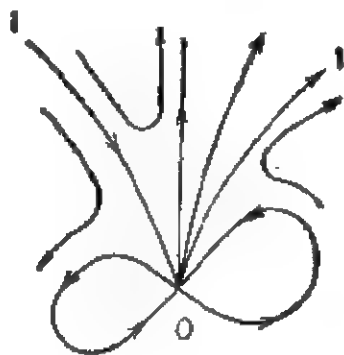


图 8.11

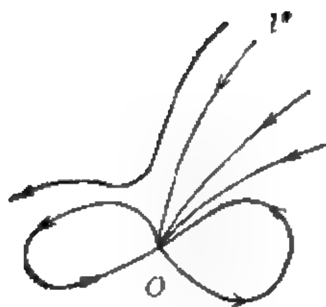


图 8.12

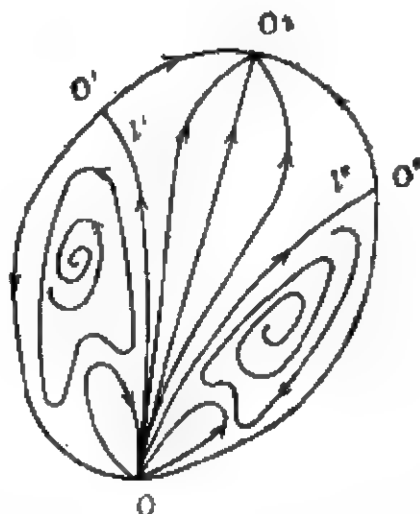


图 8.13

但图 8.12 中的 l'' 与图 8.8 中的 l' 都不是 O 点的特殊分界线；显然，后者是 O' 的特殊分界线.

在图 8.10 中虽然 l 所在的抛物域中的每一条抛物线都是 O 点的特殊分界线，但我们以后遇到这种情况时都只取其中一条来讨论，即算作 O 在这两个双曲域之间只有一条特殊分界线. 但是如果在上述抛物域中有两条轨线从 O 跑出，最后成为另二奇点(或另一奇点)的特殊分界线，如图 8.13 所示，则在计算此图中的特殊分界线的条数时，我们算作 O, O' 与 O'' 都各有一条，因此总共是三条.

为了讨论奇点的指标和特殊分界线的条数之间的关系，需要

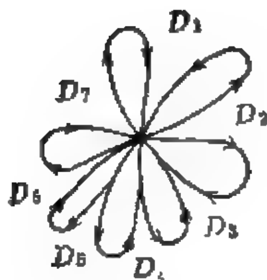


图 8.14

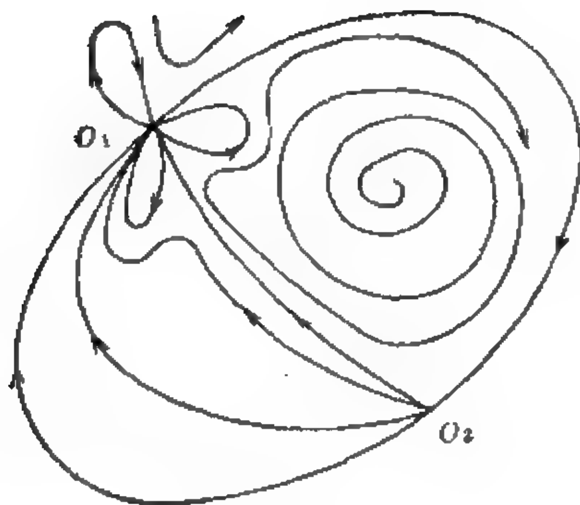


图 8.15

先对奇点邻近的轨线结构进行一些分析，今把奇点 O 邻域中除去 n 个椭圆域以后所得到的诸区域分成 A,B,C 三类：

1. A 类域——它的两条境界线中的一条进入 O，另一条离开 O，如图 8.14 中的域 D_6, D_7, D_4。

2. B 类域——它的两条境界线都离开 O，如图 8.14 中的 D_2, D_5。

3. C 类域——它的两条境界线都进入 O，如图 8.14 中的 D_1, D_3。

容易看出，关于 A,B,C 三类域有以下五个简单性质：

1) 任一 A 类域中必含奇数个双曲域。设其含有 $2k+1$ 个双曲域，则在此 A 类域中有 k 条进入 O 点的特殊分界线和 k 条离开 O 点的特殊分界线。

2) 任一 B（或 C）类域必含偶数个双曲域。设它含有 $2k$ $(k>0)$ 个双曲域，则其中有 k 条进入（离开）O 的特殊分界线，$k-1$ 条离开（进入）O 点的特殊分界线。B 或 C 类域也可能不含双曲域和特殊分界线。

3) B 类域与 C 类域的个数相同。当不计 A 类域时 B 类域与 C 类域相间地循环排列着。

4) A, B, C 三类区域的个数之和等于椭圆域的个数[1].

5) 从 O 点跑出的特殊分界线 l 如果最后又进入 O(不一定作为特殊分界线),则在它所包围的区域内部必存在奇点.(对于进入 O 的特殊分界线,情况也是如此). 这是因为如果在 l 所包围的区域中不含奇点, 则 l 或是位于某一最大椭圆域中 (如图 8.7 中的 l_2), 或是它自己就是某一最大椭圆域的边界(如图 8.9 中的 l).

下面介绍确定奇点的指标和它的特殊分界线的条数之间的关系的两个引理.

引理 2. 设普通奇点 O 的指标为 K, 从 O 跑出(跑进)的特殊分界线的条数为 $N(N')$, 则

$$N(N') \geqslant \begin{cases} -K+1, & \text{当 } K \leqslant 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } K > 0 \text{ 时}. \end{cases} \tag{2}$$

证. 显然只须证明前一不等式. 为此,注意,在不计奇点 O 的椭圆域的情况之下, 进入 O 的特殊分界线与跑出 O 的特殊分界线是循环相间的. 因而其总数是相等的,今由指标公式有

$$K = 1 + \frac{\sigma - \nu}{2},$$

其中 σ 是 O 点椭圆域的个数, ν 是 O 点双曲域的个数. 由此有

$$\nu = \sigma + 2 - 2K \geqslant 2 - 2K.$$

故至少有 $1-K$ 条特殊分界线跑出(跑进) O, 这就是我们所要证明的不等式. 特别地,当 $\sigma = 0$ 时 $N = N' = 1 - K$.

引理 3. 设在某一区域内有 n 个奇点, 它们的指标之和为 K, 设从 n 个奇点跑出(跑进)的特殊分界线的条数为 $N(N')$, 则

$$N(N') \geqslant n - K. \tag{3}$$

证. 设 n 个奇点的指标由下表确定.

---

1) 在图 8.7 中, 若看 O 点的小邻域, 则其中有两个椭圆域(不是最大椭圆域): 一个 B 类域, 一个 C 类域, 若取最大椭圆域 $Ol_1O'l_1$, 则除了它以外, 余下的是一个 A 类域.

指标数	h	$h-1$	…	1	0	-1	…	$-k+1$	$-k$
奇点数	σ_h	σ_{h-1}	…	$\sigma_1=r$	σ_0	σ_{-1}	…	σ_{-k+1}	σ_{-k}

于是有

$$\sum_{i=-k}^{h}\sigma_i=n,\quad \sum_{i=-k}^{h}i\sigma_i=K.$$

应用引理 2 的不等式可得

$$\begin{aligned}N(N')&\geqslant\sigma_0+2\sigma_{-1}+3\sigma_{-2}+\cdots(k+1)\sigma_{-k}\\&=\sigma_2+2\sigma_3+\cdots+(h-1)\sigma_h+n-K\\&\geqslant n-K.\end{aligned}$$

注意：设 n 个奇点中指标为 $+1$ 的奇点有 r 个，则当 $K>r$ 时引理中所得的不等式还可以改进为

$$(2n-K-r+i)/2,$$

其中 $i=0$，当 $K-r$ 为偶数时；$i=1$，当 $K-r$ 为奇数时。

现在证明本节的第一个主要定理。

定理1. 设奇闭轨线 l 上有 h 个广义焦点，k 个非广义焦点 $O_1,O_2,\cdots,O_k$[1]. l 所包围的区域记为 D。记 $\overline{D}=D\cup l$. 设诸 O_i 的位于 D 内部的 B 类和 C 类域之中不含双曲域者总共有 m 个。但这里约定，l 对于每一 O_i 来说都被看成是椭圆域的边界. 设从诸奇点 O_i 跑出，以及跑进 O_i 的，位于 D 内部的特殊分界线一共有 p 条。那么 D 内一切奇点的指标的总和是

$$\mathrm{ind}D=1+\frac{p-m-h}{2}.\tag{4}$$

例 5. 在图 8.13 中，

$$h=0,\ m=1,\ p=3\ 故\ \mathrm{ind}\,D=2,$$

这由 D 内部有两个焦点可以证实。

在图 8.15 中，

1) 在这定理中结点可以作为广义焦点，也可以作为非广义焦点. (4) 式中的 $h(m)$ 在前一情况比后一情况大(小)1，故(4)式的值不变.

$$m = 1,\ p = 1,\ h = 0,\ \text{ind}\, D = 1,$$

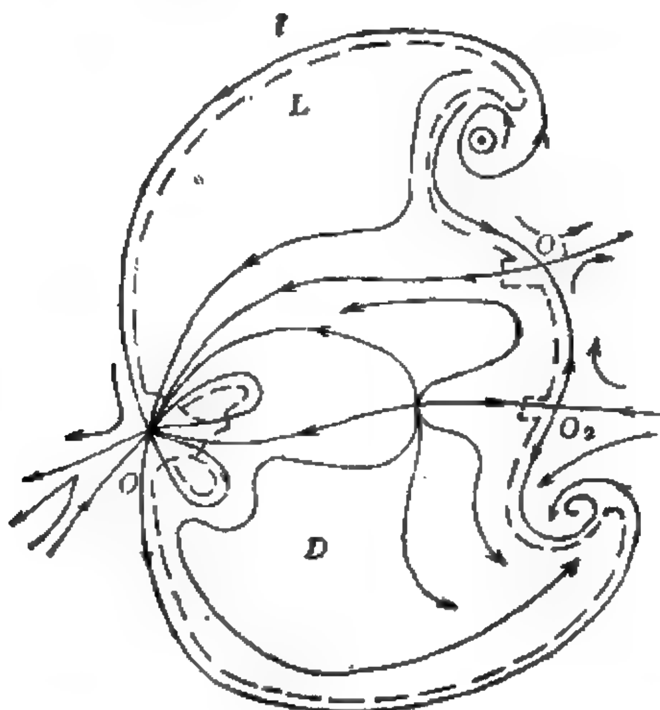
这由D内部只有一个焦点可以证实。

在图 8.8 中，

$$p = 1,\ m = 3,\ h = 0,\ \text{ind}\, D = 0,$$

D 内部无奇点。

定理 1 的证明. 设奇闭轨线 l 如图 8.16 所示。今作一条位于D内部而与 l 足够接近的光滑曲线 L，使得L与 l 之间没有方程 (1) 的奇点。



$p = 3,\ m = 1,\ h = 2,\ \text{ind}\, D = 1$

图 8.16

L 由一些轨线段(虚线)以及虚线之间的实线段(局部截痕，但虚线与实线要光滑地连接，象图 8.5 中的 $\widehat{ABC}$ 那样)构成。方程 (1) 位于D内部的奇点指标之和等于沿 L 逆时针方向走一周时，(1) 所确定的向量场的方向的改变量的积累. 今作一辅助向量场，使它以 L 为闭轨线，则新向量场沿 L 的改变量为 2π。已知在L上的虚线部分，新旧向量场改变量之差为零. 因此，只要查看当点跑过各实线段时，新旧向量场的改变量之差，就可算出当点沿着 L 的

正向走一圈时，旧向量的改变量的积累．它应是 2π 的整数倍．以 2π 除之，即可得到方程（1）在 L 内部，也就是在 D 内部的一切奇点的指标之和了。

应用［13］第七章 §9 证明 Bendixson 指标公式时所用的方法，容易得到下列几条结论：

1. 当 L 越过不含双曲域的 B 或 C 类域时，新向量的改变量比旧向量场的改变量增加 π。

2. 当 L 越过椭圆轨线而走上双曲轨线，或是反之，则新旧向量场的改变量之差为零。

3. 当 L 越过特殊分界线时，新向量场的改变量比旧向量场的改变量减少 π。

4. 当 L 通过广义焦点时，新向量场的改变量比旧向量场的改变量增加 π。

由此可知，当动点沿 L 逆时针方向走一圈时，方程（1）所确定的向量场的改变量为

$$2\pi+(p-m-h)\pi,$$

以 2π 除之，即得

$$\operatorname{ind} D=1+\frac{p-m-h}{2}.$$

例 6. 在图 8.17 中，

$$p=h=0,\ m=2,\ 故\ \operatorname{ind} D=0.$$

在图 8.18 中，



图 8.17

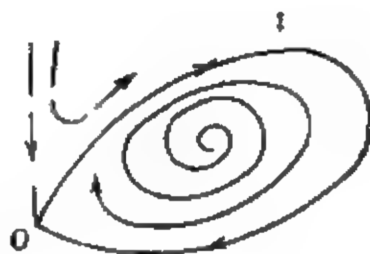


图 8.18

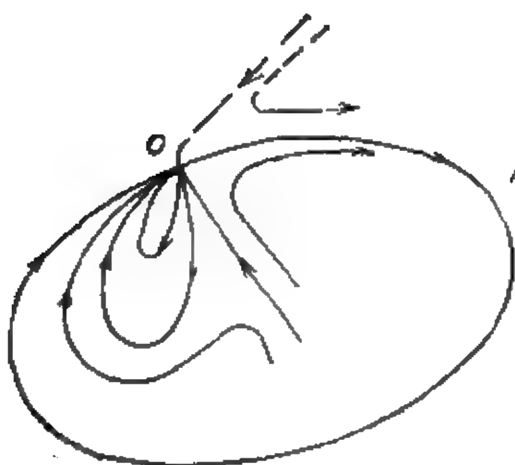


图 8.19

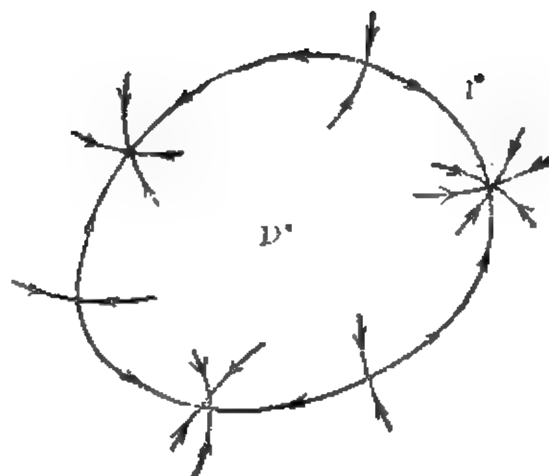


图 8.20

$$p=0,\ m=h=0,\ \text{故}\ \operatorname{ind}D=1.$$

在图 8.19 中，

$$p=m=1,\ h=0,\ \text{故}\ \operatorname{ind}D=1.$$

图 8.18 与 8.19 中的 l 表示从奇点 O 跑出最后又进入 O 的特殊分界线。由于在这两种情况都有 $\operatorname{ind}D=1$，故说明 D 内部必含奇点。

例 7. 把图 8.6 中两条分界线所围的阴影区域以及内广义焦点 F 作为奇闭轨线 L 和它的内部 D，则 $p=h=1$，$m=0$，故 $\operatorname{ind}D=1$，D 内部应有奇点。如果只有一个，则其指标应等于 $+1$。

例 8. 在 [68]，[69] 中定义 $\omega(\alpha)$ 圈为：动力系统的一条奇闭轨线 l^*，其上有 k 个鞍点和 k 个稳定(不稳定)结点，它们彼此相间地排列着，如图8.20 所示；并证明它在其内外半环状邻域中各有一单闭曲线截痕，使凡轨线与之相交者都从半环状域的外(内)部进入(跑出)其内(外)部，仿照定义 1 我们不妨称这种 $\omega(\alpha)$ 圈为广义稳定(不稳定)结点。它既是外广义结点，也是内广义结点。又由定理 1 知对 l^* 有 $p=k, h=0, m=k$，从而 $\operatorname{ind}D^*=1$。

由于广义结点与广义焦点的性质类似，故在定理 1 的奇闭轨线 l 上原来的 h 个广义焦点之中也可以有几个是广义结点，而定理的结论不变。但应注意：如果把图 8.20 中的 l^* 作为图 8.16 中

奇闭轨线 l 上的一个广义结点看待，则整个 l^* 应视为 l 上的一个"广义"点，而不应把 l^* 的一部分轨线作为 l 的一部分轨线看待；否则，在 (4) 中的 p, m, h 的值就要另行计算了。

为了和以后将要介绍的其它类似的公式有所区别，现在把公式 (4) 改写为

$$\operatorname{ind} D = 1 + \frac{p_{内} - m_{内} - h}{2}. \tag{5}$$

定理 2. 在定理 1 的条件之下，D 内部奇点的指标之和可表为

$$\operatorname{ind} D = 1 + \frac{\nu_{内} - \sigma_{内} - k - h}{2}, \tag{6}$$

其中 $\nu_{内}$ 与 $\sigma_{内}$ 分别表示 l 上 k 个非广义焦点 $O_1, O_2, \cdots, O_k$ 的，位于 D 内部的双曲域的总数与椭圆域的总数。

证. 对于任一非焦点，非结点类型的奇点，已知它的椭圆域的总数为

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_B + \sigma_C,$$

其中 $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ 分别表示这一奇点的 A, B, C 类域的总数。但已知任一 A 类域，或任一含双曲域的 B 或 C 类域中，双曲域的个数等于其中特殊分界线的条数加 1；而不含双曲域的 B 或 C 类域中则无特殊分界线，故由上式立刻得到

$$\sigma = \nu - p + m,$$

其中 p 与 ν 分别表示这一奇点的特殊分界线的条数和双曲域的总数，m 表示不含双曲域的 B 及 C 类域的总数。上式又可改写为

$$p - m = \nu - \sigma. \tag{7}$$

注意1：(7) 式对焦点与结点也成立，这时有 $p = m = \nu = \sigma = 0$。对于鞍点则有 $p = \nu, \sigma = m = 0$。

注意 2：利用 (7) 式可以把 Bendixson 关于奇点的指标公式改写为

$$\operatorname{ind} O = 1 + \frac{m - p}{2}. \tag{8}$$

为了证明(6)式，我们把它和(5)式比较，就知道只须对 l 上每一既非焦点又非结点的普通奇点 O 证明下式成立即可。

$$p_{内}^{O}-m_{内}^{O}=\nu_{内}^{O}-\sigma_{内}^{O}-1, \tag{9}$$

这里右上角的O表示仅对奇点 O 而言。

一般来说，奇点 O 的椭圆域与双曲域有一部分在 D 内部，另一部分在 D 外部，下面分两种情况来讨论。

1. 设 l 上的轨线从一边进入 O，而从另一边离开 O。由于我们只研究 D 内部的 p, m, σ, ν 之间的关系，故这时不妨把 O 的位于 D 外部的邻域看成是由一个双曲域所构成，它的境界线就是 l，如图 8.21 所示[1]。对它应用公式(7)，可得

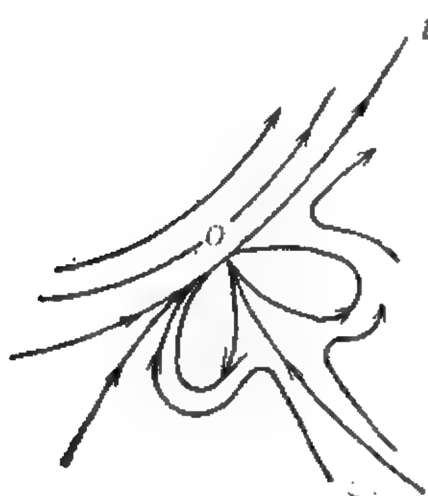


图 8.21

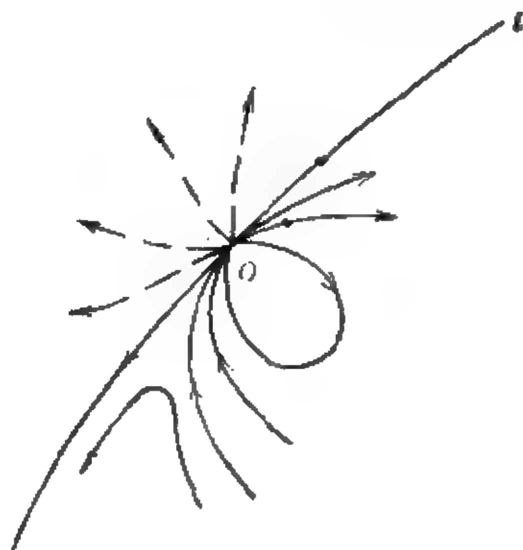


图 8.22

$$p^{O}-m^{O}=\nu^{O}-\sigma^{O}, \tag{10}$$

但容易看出，现在有：

$$p^{O}=p_{内}^{O}+1,\ m^{O}=m_{内}^{O}-1,\ \nu^{O}=\nu_{内}^{O}+1,\ \sigma^{O}=\sigma_{内}^{O},$$

代入(10)式，即得

$$p_{内}^{O}-m_{内}^{O}=\nu_{内}^{O}-\sigma_{内}^{O}-1. \tag{9}$$

2. 设 l 上轨线的方向是两边都离开(或进入) O。这时不妨把 O 的位于 D 外部的邻域看成是一个抛物域，它以 l 为境界线，如

1) 这里仅仅是为了画图方便，其实在任何情况下(9)式都成立。

图 8.22 所示。于是有

$$\sigma^{\circ}=\sigma^{\circ}_{内},\ m^{\circ}=m^{\circ}_{内}-1,\ \nu^{\circ}=\nu^{\circ}_{内},\ p^{\circ}=p^{\circ}_{内},$$

代入 (10) 式，仍得 (9) 式。

以上是 D 内有一个双曲域在 O 点与 l 相邻的情况。如果在不计抛物域的情况之下，D 中有两个双曲域在 O 点与 l 相邻，如图 8.23，8.24 所示，结果也是一样，证明从略。

把 (9) 式关于 k 个非焦点，非结点型的奇点相加，代入 (5) 式，即得 (6) 式，定理 2 得证。

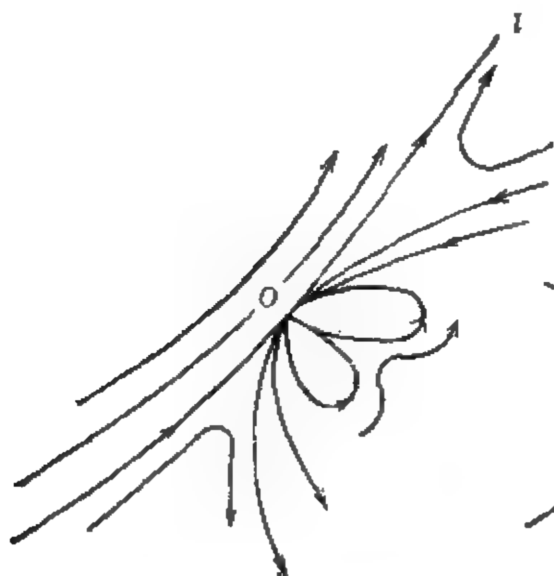


图 8.23

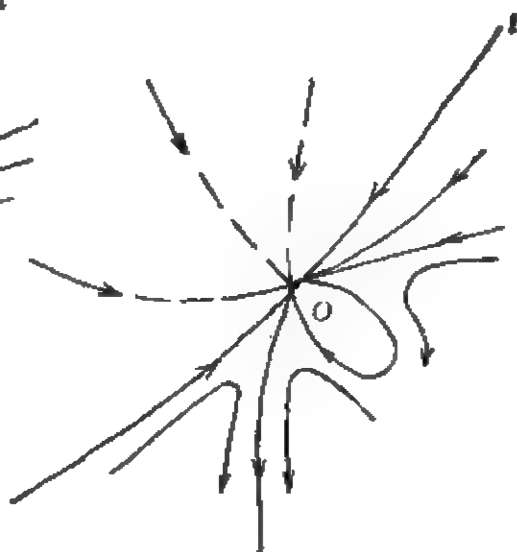


图 8.24

现在注意，位于奇闭轨线 l 上的一切奇点的指标之和是

$$h+\sum_{i=1}^{k}\left(1+\frac{\sigma_i-\nu_i}{2}\right), \tag{11}$$

其中 σ_i 与 ν_i 分别表示 O_i 点的椭圆域总数与双曲域总数。把 (11) 式和 (6) 式相加，即得：

定理 3. 位于 D 内部以及 l 上的一切奇点的指标之和为

$$\operatorname{ind}\overline{D}-1+\frac{h+k+\sigma_{外}-\nu_{外}}{2}, \tag{12}$$

$\nu_{外}$ 与 $\sigma_{外}$ 的意义与 $\nu_{内}$，$\sigma_{内}$ 类似。

仿 (9)，可证对 l 上的 k 个非焦点，非结点型奇点有

$$p_{外}-m_{外}=\nu_{外}-\sigma_{外}-k,$$

代入 (12) 式，可得 ind $\bar{D}$ 的另一(类似于 (5) 的)表达式

$$\operatorname{ind}\bar{D}=1+\frac{h+m_{外}-p_{外}}{2}. \tag{13}$$

当然，此式亦可仿定理 1 直接证明。

由 (13) 式减去 (5)式，可得 (11) 式的另一表达式

$$\operatorname{ind}(\bar{D}-D)=h+\frac{m-p}{2}, \tag{14}$$

其中 m 为 l 上一切奇点的不含双曲域的 B 和 C 类域的总和，p 为 l 上一切奇点的特殊分界线的条数。

由 (13) 以及球面上奇点指标总和为 2 的事实可得 $\bar{D}$ 外部奇点指标总和为

$$\operatorname{ind}D_{外}=2-\operatorname{ind}\bar{D}=1+\frac{p_{外}-m_{外}-h}{2}, \tag{15}$$

形式与 (5) 完全一样。同样，还有

$$\operatorname{ind}\bar{D}_{外}=2-\operatorname{ind}D=1+\frac{h+m_{内}-p_{内}}{2}$$

$$=1+\frac{k+h+\sigma_{内}-\nu_{内}}{2}, \tag{16}$$

与 (12) 式完全一样。

注意： 公式 (12) 可视为 Bendixson 的奇点指标公式的推广。但由于 $k+h>1$ 时 D 有内点。而当 $k+h=1$ 时 D 有可能无内点，二者有质的差别。故不能在 (12) 式中令 $h=0$，$k=1$ 而得到 Bendixson 公式。实际上，例如把 $h=0$，$k=2$ 的 D(图 8.25) 缩为一点而得图 8.26 中的普通奇点 O，则 $\nu_{外}$ 从 3 减到 1，k 从 2 减到 0，而

$$\operatorname{ind}\bar{D}=1+\frac{2+3-3}{2}=\operatorname{ind}O=1+\frac{3-1}{2}=2.$$

有了以上这些公式以后，现在我们可以定义广义奇点了。



图 8.25



图 8.26

定义 5. 称带有内域 D 和外域 $D_外$ 的闭或奇闭轨线 l 为广义奇点，称 $\text{ind}\,\overline{D}$ 为此广义奇点的外指标，$\text{ind}\,\overline{D}_外$ 为其内指标.

引理 1 证明外广义焦点的外指标为 $+1$，内广义焦点的内指标为 $+1$. 例 8 证明广义结点的外指标和内指标都等于 $+1$.

注意：比较定义 1 与定义 5，似乎对广义焦点的要求比对一般广义奇点的要求为轻，因为后者要求广义奇点首先必须是闭或奇闭轨线，而这二者都必须是单闭曲线(见定义 2)，而对前者则无此要求，例如图 8.2 中的外广义焦点和图 8.3 中的内广义焦点都不是单闭曲线. 为了把广义焦点纳入广义奇点的范畴，我们可以把图 8.2 中的外广义焦点看成是一条具有螺状内域 D 的奇闭轨线 l，它上面有两个奇点 S_1 与 S_2，它们各在 l 外部带有两个双曲域和一个椭圆域. 这样，如果按公式 (12) 算它的外指标，仍得

$$\text{ind}\,\overline{D} = 1 + \frac{0+2+2-4}{2} = 1.$$

同样，可以把图 8.3 中的内广义焦点看成是一条具有螺状内域 D 的奇闭轨线 l，它上面有一个奇点 S，S 在 l 内部带有两个双曲域和一个椭圆域. 这样，如果按公式 (16) 算它的内指标，仍得

$$\text{ind}\,\overline{D}_外 = 1 + \frac{0+1+1-2}{2} = 1.$$

假如设想把广义奇点或奇闭轨线 l 向内缩为一点 O，仿图 8.25, 8.26 易证：按 (12) 式计算 l 的外指标等于按 Bendixson 公式计算 O 的指标. 事实上，当 l 上奇点的个数 >2 时，将其中两奇点缩合成一奇点，则不外乎下列几种情况：

1. 双曲域与抛物域相邻，缩合的结果变为一个抛物域，在公式(12)中表现为 k 与 $\nu_{外}$ 都减少1，故指标不变。

2. 抛物域与抛物域相邻，缩合的结果产生一个椭圆域。在(12)式中表现为 $h+k$ 减少1，而 $\sigma_{外}$ 增加1，故指标不变。

3. 双曲域与双曲域相邻，缩合的结果减少了一个双曲域，在(12)中表现为 $h+k$ 减少1，$\nu_{外}$ 也减少1，故指标不变。

4. 双曲域与椭圆域相邻（实际上是与椭圆域旁的抛物域相邻），缩合的结果减少一个双曲域，故指标不变(见3))。

最后，当 l 上只剩下两个奇点 O_1，O_2时，进一步的缩合可能使 l 消失，而成为一个普通奇点，如从图8.25变到图8.26那样。也可能 l 成为在其上只有一个奇点 O 的奇闭轨线，如象图8.3中的内广义焦点或比它更复杂的、如图8.19那样的奇闭轨线。不论在上述那一种情况，我们都可以把 l 看成此奇点 O 的一个椭圆域，从而把广义奇点还原成普通奇点。但应注意，当 l（其上有唯一的奇点 O）被看成广义奇点时，我们既可以算它的外指标，还可以算它的内指标。但当 l 被看成 O 的椭圆域时，我们只能算 O 的指标，它就等于 l 的外指标。

由于当广义奇点按上法缩为一普通奇点时，其特殊分界线的条数只会减少，不会增加，所以前面的引理2与引理3对广义奇点仍然成立。因此，完全可以把广义奇点和普通奇点一样看待，并且借此可以把奇闭轨线的定义推广，使在定义2中的奇闭轨线 L 上除了普通奇点，广义焦点，广义结点以外，也可以有其它广义奇点。对于这种奇闭轨线 L，定理1依然成立。不过在计算 $p_{内}$ 和 $m_{内}$ 的值时，应当把 L 上的一切广义奇点 O_i 缩成一个普通奇点后再来计算。至于 h 的值则与 O_i 是否收缩无关。

定理4. 设有 n 个奇点（n 是正整数），$K\geqslant 0$ 是整数。如果 $n+K-1$ 条轨线中的每一条轨线其两端都进入这些奇点，则它们至少构成 K 条奇闭轨线。如果恰好构成 K 条，则所有这些奇点和轨线一起构成一个连通集。

这定理可用归纳法来证明，先固定 K，对 n 用归纳法，再固定

n，对 K 用归纳法。证明从略，见[67]。

注意：该定理不仅适用于平面上的奇点与轨线，而且也适用于曲面上的或 m 维空间中的奇点与轨线。

定理5. 设方程(1)满足本节开始时的那些条件，此外再设(1)的过环域 R 的境界点的轨线当 t 增加时都进入 R，则 R 中至少存在一条包含内境界线在其内部的闭或奇闭轨线。

证. 由于 n 个奇点的指标之和为零，故由引理3，从这 n 个奇点至少跑出 n 条特殊分界线。它们都不能跑出 R，因此每一条的 ω 极限集都在 R 中。如果在这些 ω 极限集中存在包含 R 的内境界线在其内部的闭或奇闭轨线，则定理得证。否则，我们首先证明：

在 R 中至少存在一条不是闭轨线的奇闭轨线 Γ'。

事实上，这时 R 中的奇点不可能全部位于 $k(k\geqslant 0)$ 个外广义焦点 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_k$ 之上或其内部，而这些 Γ_i 又都不包含 R 的内境界线在其内部。因若如此，则 R 中的奇点的指标之和将不等于零了。又不妨假定如果有外广义焦点 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_k$ 存在的话，则它们互不包含，否则，我们只须考虑位于最外面的那些 Γ_i 好了。这样，R 中的奇点可以分成两类：一类奇点位于某些不包含 R 的内境界线在其内部的外广义焦点 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_k$ 之上或其内部；另一类奇点(必定存在)则不在任何 Γ_i 之上或其内部。

把 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_k$ 看成 k 个新的奇点，其中每一个的外指标都是1，则 R 中将有 $m(n\geqslant m\geqslant k)$ 个广义奇点，它们的指标之和仍为零。因而根据引理3，从这 m 个奇点至少跑出同样数目的特殊分界线。实际上，特殊分界线都是从 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k$ 以外的 $m-k$ 个普通奇点跑出来的。若它们最后都进入这 m 个奇点，则由定理4知道至少构成一条奇闭轨线 Γ'。否则，至少存在一条特殊分界线，它的 ω 极限集为一内广义焦点(但非外广义焦点)。这时，此内广义焦点本身或是它的一部分必为一奇闭轨线 Γ'。

如果 Γ' 已包含 R 的内境界线在其内部，则定理得证。否则，可以把 Γ' 看成一个新的广义奇点，它上面以及内部所含的奇点必多于一个。这是因为：1)引理2前面关于特殊分界线的性质5对

广义奇点同样成立。因此，如果上述的 Γ' 是从一奇点 P 出发而重新回到 P 的，则 Γ' 上及其内部至少有两个奇点。2) 若 Γ' 是内广义焦点而非外广义焦点，则 Γ' 上面以及它的内部也至少有两个奇点。这样，我们在 R 中所得到的广义奇点(包括普通奇点)的数目至少比 $m(\leqslant n)$ 少一个。

对这些广义奇点应用前面一样的推理，我们或是得到一个包含 R 的内境界线在其内部的奇闭轨线，或是得到又一条新的，不含 R 的内境界线在其内部的奇闭轨线，在它上面以及内部含有多于一个(旧的)广义奇点(包括普通奇点作为特例)。由于 R 中只含有限多个奇点，所以经过最多 n 次步骤以后，或是得到一条我们所需要的奇闭轨线，或是得到一条不含 R 的内境界线在其内部的奇闭轨线 Γ，在它上面以及内部含有 R 中的全部普通奇点，因而 Γ 的指标为零。由引理 2，从 Γ 向外至少跑出一条特殊分界线 l，若 l 的 ω 极限集是包含 R 的内境界线在其内部的闭或奇闭轨线[1]，则定理已得证明。或者 l 重又回到 Γ，由于前述的性质 5，l 与 Γ 之间必包含新的奇点，所以 l 必定要环绕 R 的内境界线，这时 Γ 与 l 一起就构成所需要的奇闭轨线，定理证毕。

注意 1：虽然在定理的证明过程中我们曾多次把旧的奇闭轨线看成新的广义奇点，但只要一条奇闭轨线 Γ 上的各段轨线的走向不一致(例如 Γ 上有两个相邻的焦点，结点或广义焦点)，则 Γ 就不可能被看成新的广义焦点.因此当 Γ 被看成新的奇闭轨线 Γ' 上的新广义奇点时，进入(或从它跑出)的特殊分界线必进入 Γ 上的一个普通奇点或广义焦点(或从这种点跑出)。按照这一分析可知定理 5 证明中最后得到的奇闭轨线的构图仍应类似于图8.16中的 l，不会复杂到那里去。

注意 2：由奇点概念与奇闭轨线概念的推广以及本定理的证明过程。可以看出：微分方程定性理论中的局部性质与大范围性质这两者之间并无截然的界限，二者是可以通过适当的方式统一

1) 若 l 的 ω 极限集是内广义焦点，它只含 Γ 而不含 R 的内境界线，则其内部的奇点指标总和为零，与引理 1 相矛盾。

起来的.我们不但期望本节的主要定理,而且也期望本节中的思想方法能在曲面动力系统的定性理论得到更广泛的应用[1]。

现在再把定理 5 推广到多连通区域去:

定理 6. 设 R_m 是有 $m-1$ 个洞的平面 m 连通域, $m \geqslant 3$. 设方程 (1) 中凡与 R_m 的边界相遇的轨线,都从 R_m 的外部进入其内部,则在 R_m 中至少存在 $m-1$ 条这样的闭或奇闭轨线,使得从其中任取 $m'(1 \leqslant m' \leqslant m-1)$ 条出来,都不可能由它们围成一个全部属于 R_m 的区域.

证. 首先证明 R_m 中至少存在一条闭或奇闭轨线,它的内部至少含有 R_m 的一个洞.

设 R_m 的 $m-1$ 个洞是 $G_1, \cdots, G_{m-1}$. 现在把 $G_2, \cdots, G_{m-1}$ 填满,对所得到的双连通域 R_2 应用定理 5,即得一条包含洞 G_1 在其内部的闭或奇闭轨线 Γ_1. 如果 Γ_1 全部位于 R_m 内部,则结论得证. 如果 Γ_1 通过某一个洞 G_i (可能还通过其它的洞),那么把除了 G_i 以外的其它 $m-2$ 个洞填满,对所得到的双连通域 R_2' 应用定理 5,可知 R_2' 中必存在一条包含 G_i 在其内部的闭或奇闭轨线 Γ_i. 如果 Γ_i 不与 Γ_1 相遇,则显然 Γ_i 已把 G_i 和 G_1 都包含

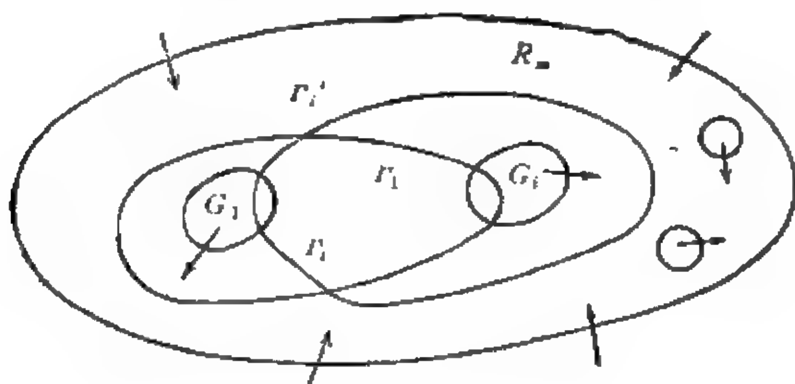


图 8.27

1) 最近在王现"关于 Lienard 型系统之极限环"一文中引进: "有指标 +1 的奇点系"(相当于外广义结点)的概念,并推广一些已知的关于极限环的存在性定理到包含多个奇点的极限环的存在性问题去.由此可见奇点概念的推广又有了新的用处.

在它的内部了．如果 Γ_i 与 Γ_1 相遇，根据[61]附录中的 Cartwright 定理，知道存在另一奇闭轨线 Γ_i'，它是由 Γ_1 与 Γ_i 的部分弧段合并起来而构成的，并且 Γ_i' 把 G_1 和 G_i 都包含在它的内部了(图 8.27)。

当 Γ_i 或 Γ_i' 全部位于 R_m 内时，结论得证。否则，它必定还通过 R_m 的其它的洞．于是又可按前述步骤处理，重复有限次后必能得到一条全部位于 R_m 中，且至少包含 R_m 的一个洞的闭或奇闭轨线 Γ。

其次再证：至少存在一条闭或奇闭轨线 $\Gamma^{(1)}$，它的内部只包含 R_m 的一个洞。

为此，考察前段已得到的闭或奇闭轨线 Γ．如果它内部只含 R_m 的一个洞，则可取它为 $\Gamma^{(1)}$。如果 Γ 内部包含 R_m 的 r 个洞，$2\leqslant r\leqslant m-1$。不妨设 Γ 是包含这 r 个洞的闭或奇闭轨线中最内部的一个。现在把 Γ 看成是球面上包含无限远点的一个广义奇点，并且对 Γ 只考虑它的内部．设 Γ 内部所含 R_m 中的奇点为 O_1，O_2，$\cdots$，O_j。现在 Γ 内部的 r 个洞所含的奇点的指标总和为 r，故球面上的 $j+1$ 个奇点 O_1，$\cdots$，O_j，Γ 的指标总和为 $2-r\leqslant 0$。由引理 3，从这些奇点跑出的特殊分界线不少于

$$j+1-(2-r)=j+r-1\geqslant j+1$$

条。于是仿定理 5 的证明，知道它们至少构成一条奇闭轨线 Γ'．Γ' 内部必包含 R_m 的洞，且其个数应少于 r 个(否则将和 Γ 的定义相矛盾)。

如果 Γ' 内部只含 R_m 的一个洞，则目的已达到．否则，可再按上面的办法做下去，最多经过 $m-1$ 次以后必能得到只含 R_m 的一个洞的闭或奇闭轨线 $\Gamma^{(1)}$。

最后来证明定理 6 的结论。

为此，将 R_m 中一切仅含一个洞的最大闭或奇闭轨线 $\Gamma_i^{(1)}$ 都看成广义奇点，称之为一级特殊广义奇点．如果这种 $\Gamma_i^{(1)}$ 一共有 $m-1$ 个，则定理已得证明．如果它们只有 r 个，$r<m-1$．设它们所包含的 r 个洞为 G_1，$\cdots$，G_r。把这 r 个洞填满．在含有

$m-r-1$ 个洞 $G_{r+1},\cdots,G_{m-1}$ 的 $m-r$ 连通域 $R^{(1)}_{m-r}$ 中有 R_m 中原来的奇点和 r 个一级特殊广义奇点 $\Gamma^{(1)}_1,\cdots,\Gamma^{(1)}_r$。对这些奇点应用前两段的推理，知道至少存在一条闭或奇闭轨线 $\Gamma^{(2)}$，它内部只含 $G_{r+1},\cdots,G_{m-1}$ 中的一个洞 G_i。但若 $\Gamma^{(2)}$ 内部不含 $\Gamma^{(1)}_1,\cdots,\Gamma^{(1)}_r$ 中的任何一个，并且也不以 $\Gamma^{(1)}_1,\cdots,\Gamma^{(1)}_r$ 中的任何一个作为它上面的广义奇点，则 $\Gamma^{(2)}$ 应已列入 $\Gamma^{(1)}_1,\cdots,\Gamma^{(1)}_r$ 之中，与假设矛盾。因此，$\Gamma^{(2)}$ 除了内部含有洞 G_i 以外，或是内部至少还含有一个一级特殊广义奇点 $\Gamma^{(1)}_j$，或是至少以一个一级特殊广义奇点作为它上面的一个奇点。我们称 $\Gamma^{(2)}$ 为二级特殊广义奇点。不妨设 $\Gamma^{(2)}$ 是具有此种性质的闭或奇闭轨线中的最大者。

如果全部一级与二级特殊广义奇点共有 $m-1$ 个，则定理已得证明。否则，用与前同样的推理知必存在这样的闭或奇闭轨线 $\Gamma^{(3)}$，它的内部仅含一个 R_m 的、不含于一级与二级特殊广义奇点内部的洞，并且或是 $\Gamma^{(3)}$ 内部还至少包含一个二级特殊广义奇点，或是 $\Gamma^{(3)}$ 至少以一个二级特殊广义奇点作为它上面的一个广义奇点，我们称 $\Gamma^{(3)}$ 为三级特殊广义奇点。由于 R_m 中只有 $m-1$ 个洞和有限个普通奇点，所以最多经过 $m-1$ 次步骤以后就可以得到定理的证明。如上所得到的 $m-1$ 条闭或奇闭轨线满足定理后半段所提的要求是明显的。

例 9. 图 8.28 是 $m=4$ 的一种情况。其中 $\Gamma^{(i)}(i=1,2,3)$ 是 i 级特殊广义奇点。$\Gamma^{(1)}$ 是极限环，内部包含 R_4 的一个洞。$\Gamma^{(2)}$ 则包含第二个洞，且其上有一个鞍点和一个一级特殊广义奇点 $\Gamma^{(1)}$。$\Gamma^{(3)}$ 内部除包含 $\Gamma^{(2)}$ 以外，还再包含了第三个洞。在 $\Gamma^{(3)}$ 上面有一个鞍点和一个 $\Gamma^{(1)}$。

最后介绍 [69] 中所给出的定理 5 的一个新证法，但它要利用前几节的知识以及在下一节中将要证明的一个事实[1] 作为准备知识。

证。 设环域 R 的内境界线为 C_1。今沿 C_1 切开 R，丢掉 C_1 内

---

1) §9 定理 1 证明的第 1 段。

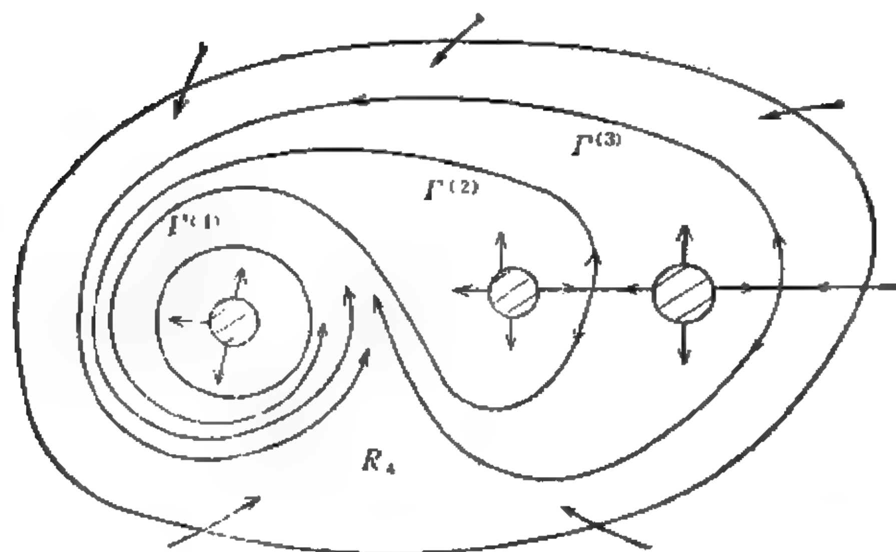


图 6.28

部那一块，贴上一个只含唯一完全不稳定奇点 P 的开圆盘，则所得的动力系统在 R 内与 (1) 完全一致。 由 §9 定理 1 证明的第 1 段知道 P 的负向吸引区域同胚于 R^2，记之为 $N(P)$。显然 $\partial N(P) \subset R$。今考虑过 C_1 上任一点 q 的正半轨道 $\varphi(q, I^+)$。由 [55] 第六章 §3 定理 II 知道，如果 $\varphi(q, t)$ 的 ω 极限集中有常点，则它必定是正向轨道稳定的，就是说，能找到 q 的 ε 邻域，使得从其中出发的任一轨线都和 $\varphi(q, t)$ 有相同的 ω 极限集。因此，现在只有两种可能性：

1. 对任意的 $q \in C_1$，$\varphi(q, t)$ 都是正向轨道稳定的。 注意到平面动力系统不可能有非闭的 P 式稳定轨线，由有限覆盖定理知道过 C_1 上一切点的轨线都有相同的 ω 极限集，它是内广义焦点 L、显然，L 包含 C_1 在其内部。 这时动力系统在 C_1 外围有一螺域，L 就是它的边界。

2. 存在 $q_i \in C_1 (i = 1, 2, \cdots, k)$，使 $\varphi(q_i, t)$ 的 ω 极限集是单个奇点且 $\varphi(q_i, t)$ 为轨道不稳定（因为 R 内部只有有限个奇点，所以这种 q_i 也只有有限个）。记这些奇点为 $p_1, \cdots, p_k$[1] 于

1) 如果 $\varphi(q_i, t) \to p'_j$ 当 $t \to +\infty$，且轨线可继续在 p'_j 以后延长，把 p'_j 作为一个可去奇点(即它的两边各有一个双曲域)，则不把 p'_j 计入 $p_1, \cdots, p_k$ 之列.

是得到有限个带域。每个带域，例如 (pp_1p_2)（见图 8.29），其两条侧边 $\varphi(q_1, I^+)$ 和 $\varphi(q_2, I^+)$ 位于 $N(p)$ 中，而对一切 $q\in C_1\cap(pp_1p_2)$，$f(q, t)$ 都有相同的极限集 p_{12}，它可以与 p_1 或 p_2 重合，也可以是另一奇点或外广义焦点。(pp_1p_2) 的另一边属于 $\partial N(p)$，它由连结 p_1，p_2 与 p_{12} 的两条或一条轨线段构成。对其它带域也有同样的结论。因此最后我们得到由普通奇点，可能还有外广义焦点

$$p_1, p_{12}, p_2, p_{23}, p_3, \cdots, p_k, p_{k1}, p_1$$

以及依次连接它们的轨线共同组成的奇闭轨线 Γ，它显然包含 C_1 在其内部。

注意：若对多连通区域应用上述方法，则从不同的洞 C_1 与 C_2 出发所得的两个不同的吸引区域 G_1 与 G_2 可能会有部分边界重复，也可能 $\partial N(p_1)$ 整个成为 $\partial N(p_2)$ 上的一个广义焦点，这由图 8.28 很容易看出，因此结论不如定理 6 那样好。此外，定理 5 的这两种不同的证明基于完全不同的思想方法，而前一种方法较易推广到曲面上去，成为研究曲面上同伦于零以及不同伦于

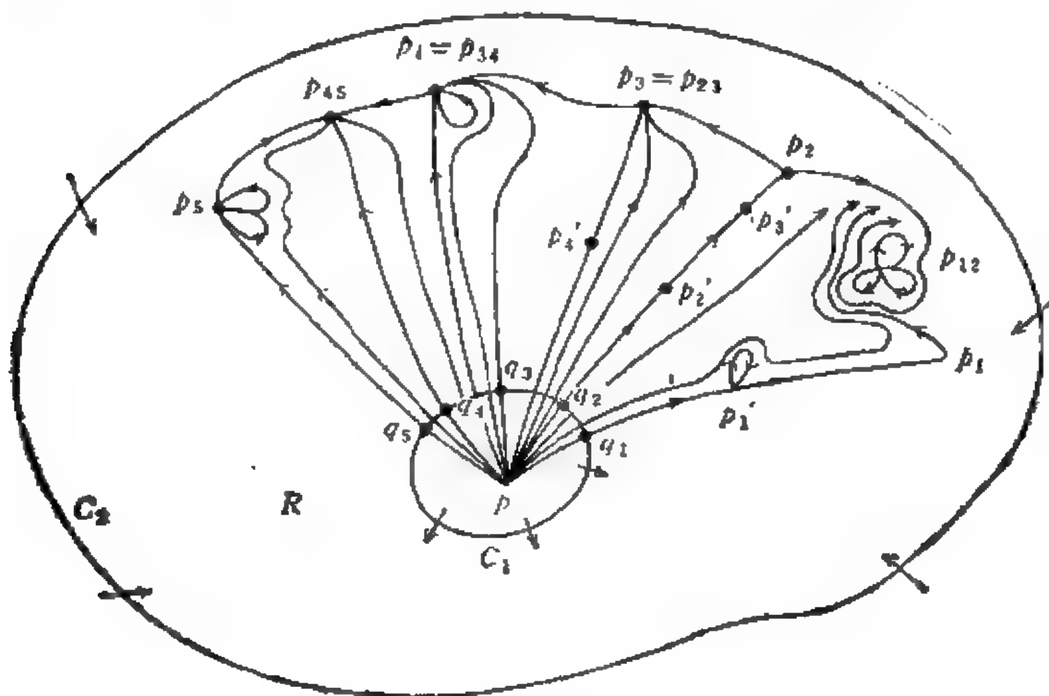


图 8.29

零的闭或奇闭轨线的存在性的一种手段，详情见§§9—10.

补遗

环域定理的另一种推广方式是下面的定理[89]:

定理7. 设G为平面上一单连通域，使得对由(1)所定义的动力系统的轨线来说，G的境界线L上没有奇点，但有σ个内切点，ν个外切点. 则G内部奇点(假设只有有限个)的指标总和为

$$\sum = 1 + \frac{\sigma - \nu}{2}. \tag{17}$$

推广到多连通域，可证:

定理8. 设G为平面上有n个洞的$n+1$连通域，其它与定理7同，则

$$\sum = 1 - n + \frac{\sigma - \nu}{2}. \tag{18}$$

利用定理8可容易地导出 Poincaré 定理(§2，定理1)在可定向闭曲面情况的一个新的证明. 为此，只须注意一个亏格为n的可定向闭曲面可视为有n个洞的球面M^2. 今以一平面π割M^2，使π与每一个洞都相交，但不经过M^2上动力系统的奇点，则得两个平面$n+1$连通域G_1与G_2. 对它们分别应用定理8，并注意$G_1(G_2)$的境界线上的内切点正好是$G_2(G_1)$境界线上的外切点，即在

$$\sum\nolimits_1 = 1 - n + \frac{\sigma_1 - \nu_1}{2} \quad 与 \quad \sum\nolimits_2 = 1 - n + \frac{\sigma_2 - \nu_2}{2} \tag{19}$$

中有$\sigma_1 = \nu_2$，$\sigma_2 = \nu_1$. 故把两式相加，即得

$$\sum = 2 - 2n. \tag{20}$$

附注. 在 H. Poincaré 的经典著作[90] §13中(17)式是作为定义写出的. 他为了证明(20)式，对M^2作三角剖分，并利用了[90] §4的相切理论，所以证明比较困难. (17)式在L为光滑且不通过奇点时，其严格证明可以在[13]第九章中找到.

图8.30是一个实例，对于3连通域G，我们有:

$$n = 2,\ \sigma = 4,\ \nu = 6,$$

从而

$$\sum = 1 - 2 + \frac{4-6}{2} = -2,$$

它反映出 G 中有两个鞍点。

对于 G 的左边那个洞内的单连通域 G'，有

$$n = 0,\ \sigma = 0,\ \nu = 2,$$

故

$$\sum{}' = 1 + \frac{0-2}{2} = 0,$$

G' 中有一高阶奇点，它有两个双曲域。

[89] 中还注意到，当区域 G 的境界线 L 上有角点，或是 L 通过动力系统的奇点，或是 L 有一段是轨线时，可以用局部光滑化的办法把角点换成非角点；把奇点看成是普通的进入点、跑出点、一、二、…重外切点或内切点（视奇点处的分界线与 L 的相对位置而定），把 L 上的轨线段看成是进入或跑出 G 的，则定理 7 和 8 的结论依然成立。

据此，对于平面二次多项式系统所定义的动力系统，由于任一直线与二次多项式系统的轨线最多只能有两个切点（奇点作为切

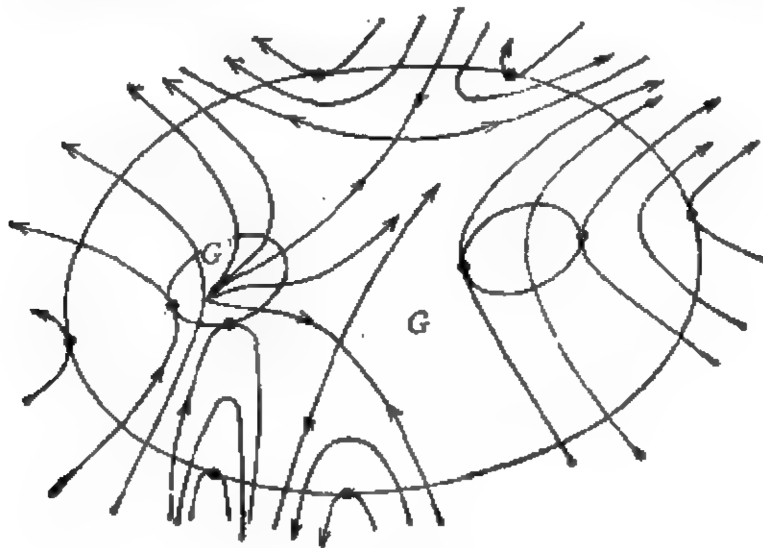


图 8.30

点看待)，否则此直线本身必为轨线(见[38] § 11 引理 11.1)。我们可以用若干直线段连接所有的有限远和无限远奇点，从而得到此动力系统的一个三角剖分。这种三角剖分的特点是：每一个三角形的顶点都是奇点，而其内部不含奇点，除此以外，三边或为轨线，或与轨线处处横截相交；不仅如此，过顶点而位于三角形内部的分界线的去向是完全确定的。称此种三角形为动力系统的基本元素。任一二次系统所定义的动力系统可以看成是有限个基本元素按一定方式的组合。从这种观点出发，看来要解决闭轨线的存在性和个数仍有困难。但要解决例如"结构稳定无环的二次系统的相图到底有几种不同的拓扑结构"(一个尚未完全解决的问题，见[38]，§ 10)也许是有希望的。详情见[93]。

§9. 曲面动力系统的闭轨与奇闭轨的存在性

对于具有任意亏格的可定向闭曲面上有奇点的 C^1 类动力系统，研究其回复轨道或 P 式稳定轨道（以闭轨为其特例）的存在性问题，首先见于1972年 R. J. Sacker 和 G. R. Sell 的文章[68]。但他们的条件太强，结果也不够理想。1980年余澍祥[69]研究同一问题，在较弱的条件下得到更好的结果；其中顺便也给本书§8定理5（推广的环域定理）以新的证明，已见于§8最后。此后，董镇喜[70][71]继续研究曲面动力系统周期解的存在性问题，并将平面多连通域上的 Poincaré-Bendixson 定理（§8定理6）推广到曲面上去。最近，朱德明[72]又对闭曲面上非零伦闭轨的存在性得到较好的结果。韩茂安[73]则利用§8定理6对 PR^2 上连续流的闭或奇闭轨线的存在性得到有趣的结果。本节主要就是介绍上述四人的部分结果。有的证明太长，我们只介绍证明的大致步骤或从略，以节省篇幅。

设亏格为 h 的闭曲面 M^h 上的 C^1 流 f 有有限个双曲奇点，其中源点用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$表示，渊点用 $\omega_1,\omega_2,\cdots$表示，鞍点用 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots$表示。

定义 1. 设 P,Q 是奇点，若一轨线 $\gamma=f(x,I)$ 满足

$$\lim_{t\to-\infty} f(x,t)=P,\lim_{t\to+\infty} f(x,t)=Q,$$

则称 γ 为转移轨道，称 P 或 Q 生成转移轨道。

定义 2. 一个源点称为自由源点，如果它不生成转移轨道。

定理 1. 设 M^h 上的 C^1 向量场 f 至少有一个自由源点 P，又不存在完全由鞍点和转移轨道组成的，并且同伦于零的闭曲线，则 f 在 M^h 上必有闭轨。

证明大意：

I. 设 P 的负向吸引区域为

$$W = \{x \in M^{h}, \lim_{t \to -\infty} f(x,t) = P\}.$$

因 P 为负向渐近稳定，故在 W 中存在 Liapunov 函数 $V(x)$．记 $V_c = V^{-1}(c)$ 为水准曲线，则 $V_c \times R$ 微分同胚于 $R^2 \backslash O \cong S \times R$，故 V_c 微分同胚于 S^1，即存在单位圆周 S^1 到 W 中的可微嵌入 h：$S^1 \to K \subset W$，K 是处处横截于流的(图 9.1)．

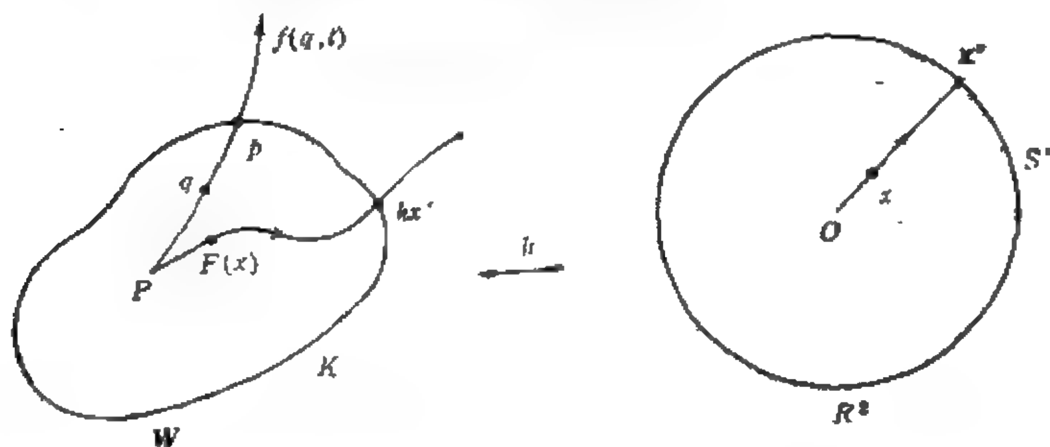


图 9.1

易证 W 与 R^2 同胚．事实上，令 φ_t 是 R^2 上由向量场 $Y(x) = x$ 所产生的流．对 $x \in R^2, x \neq 0$，以 $t(x)$ 记使

$$x' = \frac{|x|}{\|x\|} = \varphi(t(x), x) \in S^1$$

的 t 值．令 $F(0) = P$，$F(x) = f(-t(x), hx')$，则 F：$R^2 \to W$ 即为所需的同胚．

困难的是，要证明在定理的条件之下，W 的边界是闭轨线．

II. 由于 K 是流的横截线，故对 W 中任一点 $q \neq P$，$f(q,t)$ 跑到 K 外部以后不再回来，所以 $f(q,t)$ 不可能是 P^+ 稳定的；而且它也不可能成为其它 P 式稳定非闭半轨的极限集．今考察这种 $f(q,t)$ 的 ω 极限集 Ω，有下列两种可能：

1) Ω 中不含 P^+ 与 P^- 稳定非闭轨线． 这时由 § 6 定理 11 知道 Ω 或为一奇点，或由若干个奇点与两端趋于奇点的开轨线组

成，成为一周期轨线。但由定理中的假设知道前两种可能性不存在，而最后一种可能性则说明定理的结论成立。

2) Ω 中含有非闭的 P^+（或 P^-）稳定半轨 $f(m, I^+)$（或 $f(m, I^-)$）。我们要证明这情况不可能出现。

III. 证明 M^h 上的 P^+ 稳定非闭半轨 $f(m, I^+)$ 若与某一截线 Γ 的交集非空，但在 Γ 上无处稠密，则当它与别的截线相交时，交点也是无处稠密的。

IV. 若 P^+ 稳定非闭半轨 $f(m, I^+)$ 与截线 Γ 的交点在 Γ 上处处稠密，又 $f(m, I^+)$ 属于 $f(p, t)$ 的 ω 极限集，则 $f(p, t)$ 亦为 P^+ 稳定(§6，定理5)。

V. 由 III 和 IV 知道：由于 II 中的 $f(q, t)$ 不是 P^+ 稳定，故若 $f(q, t)$ 的 ω 极限集 Ω 中含有 P^+ 稳定半轨 $f(m, I^+)$，则 $f(m, I^+)$ 必具 III 中所说的性质，即 $f(m, I^+)$ 与任一截线 Γ 的交点在 Γ 上为一 Cantor 集 C。于是 $f(q, I^+)$ 与 Γ 应交于无数个点，它们分别属于 C 在 Γ 上的不同的余区间，且 q 在 W 中存在小邻域 U，使得对 U 中每一点 p，$f(p, I^+)$ 也具有如上所述的性质。

VI. 由于上述这些余区间的全体在 Γ 上处处稠密，所以经过余区间的点的正半轨线全体在 M^h 的一个子域 G 中处处稠密。根据平面上的 Jordan 曲线定理可证 G 不可能同胚于一个平面区域。但另一方面，已知 W 同胚于一平面区域，故 II 的情况 2) 不可能发生。

VII. 总结以上各点可知 W 为一螺域，其边界必为一周期轨线 Γ。这是因为：当 W 中一条正半轨线盘旋接近 Γ 时，所有其它正半轨线都必盘旋接近 Γ。否则，Γ 内将存在从 P 到其它奇点 Q 的转移轨道（参见§7 图 7.2），与假设矛盾。又若 Γ 的内域不是整个 W，则其中必有一鞍点 N，以及由 P 到 N 的转移轨道，使得从 P 的邻域中出发的轨线，除 $\overrightarrow{PN}$ 以外，都在 N 点附近起转向作用，最后才都盘旋接近于 Γ（参见§8 图 8.6），这也和 P 是自由源点的假设相矛盾。最后，由前已知 Γ 上不能有奇点，故必为周期轨线，定

理证毕。

下面再介绍[69]中引用推广了的环域定理来证明的，球面上闭轨的存在性定理。

定义 3. 称 M^2 上一条单闭曲线 Γ 为源(渊)鞍圈，如果 Γ 是由源(渊)点，鞍点和分界线所构成，且源(渊)点与鞍点在 Γ 上交替出现[1]。

显见，源(渊)鞍圈就是曲面上的双侧广义源(渊)点，并且它存在一个小的环状邻域 G，使轨线凡和 G 的边界相交时，都是从 G 的内(外)部进入外(内)部的。注意，一般曲面上的源(渊)鞍圈可以是同伦于零的，也可以是不同伦于零的。

定义 4. 球面 S^2 上一条源鞍圈 L 分 S^2 为两部分，若其中一部分不含渊点，则称渊点对于 L 是集中分布的。类似地可以定义源点对渊鞍圈的集中分布。并且本定义中的渊(源)点有时也可以理解为广义渊(源)点。

例 1. 如图 9.2，在判定渊鞍圈 l_1 与源点之间的相互关系时，可以把 l_2 连同它的内部(其中可以有源点 α_1)看成一个广义外侧渊点，则源点对于 l_1 是集中分布的。同样，如果把 l_1 看成是一个

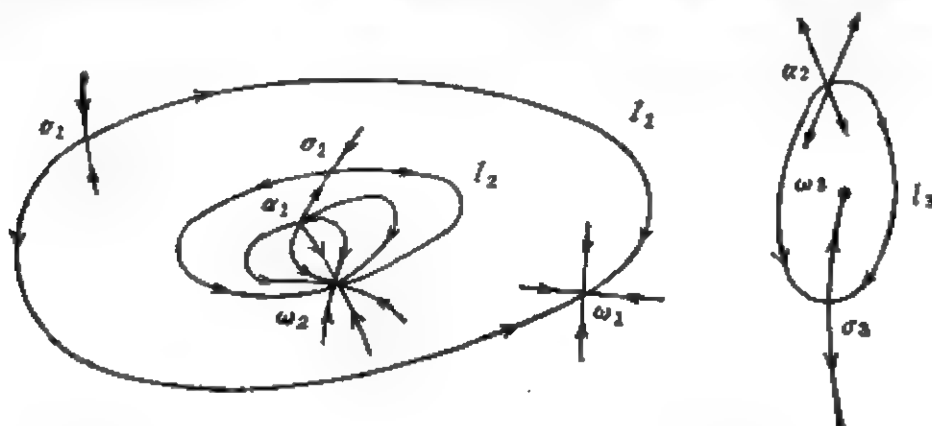


图 9.2

广义内侧渊点(它的外部可以有源点 α_3)，则源点对于 l_2 也是集中分布的。从下面的定理将可推出：在 l_1 与 l_2 之间至少存在一

1) 这一概念最先见于[68]中。

条闭轨。

定理2. 设 f 为球面 S^2 上的 C^1 向量场，它不存在完全由鞍点和转移轨道组成的同伦于零的闭曲线。如果至少存在一条源鞍圈 L，使得渊点对于 L 是集中分布的(或是存在一条渊鞍圈 L，使得源点对于 L 是集中分布的)，则在 S^2 上必存在 f 的闭轨线。

证. 我们只对括号外的情况来证明本定理。首先假设 f 没有渊点。由于 $\chi(S^2)=2$，故至少有两个源点不在 L 上面。把所有的源点的小邻域除去以后，在 L 的一侧或两侧存在一个以 L 为外境界线的多连通域，其边界上的向量场都指向区域内部。由推广的 Poincaré-Bendixson 定理以及本定理的假设条件，知道 S^2 上至少存在两条闭轨线。

其次假设有渊点存在。设 L 分 S^2 为 G_1 与 G_2 两部分，由假设，不妨设 G_1 中没有渊点。由 L 的邻域中轨线的指向知道 G_1 内部奇点的指标总和为+1，故其中至少存在一个源点。然后如前可证 G_1 中必有 f 的闭轨线存在。

例2. 考虑柱面上的动力系统

$$\dot{\varphi}=z,\dot{z}=-z(\cos\varphi+2k\cos 2\varphi)-(\sin\varphi+k\sin 2\varphi)+\beta,$$

其中 $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, $k>\frac{1}{2}$, $0<\beta<b_1$, b_1 是一确定的参数。方程在 φ 轴上有四个奇点，其中两个是鞍点，两个是渊点，相互交替排列。作变换 $z=\frac{1}{r}$ 不难证明柱面上的无穷远奇点是稳定奇点。可证对适当范围内的 β，由鞍点出发的分界线都进入渊点，因此它们一起构成一个渊鞍圈。于是由定理2知道上下半柱面上各存在一个极限环。

[69]中还有其它类似的、对于亏格为 k 的闭曲面上 C^1 向量场存在闭轨的结果，在此不再一一介绍。

[70]中所得到的，曲面上的推广了的 Poincaré-Bendixson 定理如下：

定理3. 设 D 为闭曲面 M 上以 $l(>1)$ 条互不相交的单闭

曲线为边界的区域. M 上的动力系统 φ 在 D 的边界上所确定的方向场都指向 D 的内部，又 φ 在 D 中至多有有限个奇点. 则对于 D 的每条边界，φ 都有闭轨或奇闭轨环绕着它们.

证明与前述 §8 定理 5 的新证法类似，故从略.

不难看出，定理 1 和定理 2 中肯定其存在的闭轨在曲面上都同伦于零. 下面介绍[72]中得到的、曲面上非零伦闭轨存在性的结果.

设亏格为 h 的闭曲面 M^h 上有 C^1 类动力系统 f，假设它是 Morse-Smale（简称 MS）系统[1]. 以后凡遇到广义焦点、广义结点、闭轨、源鞍圈或渊鞍圈，只要它们在 M^h 上是同伦于零的，就将它及其内部看成是一个广义的指标为 $+1$ 的奇点. 此外，由 MS 系统的定义还可知道，进入鞍点的分界线都来自源点或周期轨线.

定义 5. 称 M^h 上一条单闭曲线 Γ 为非分裂型的，如果 $M^h-\Gamma$ 是连通的；否则，称 Γ 是分裂型的.

对 M^h 上一条非分裂型单闭曲线 Γ，我们可以象 §4 那样对 $M^h-\Gamma$ 作单点(两点)紧化，如果 Γ 是单边(双边)曲线. 当 Γ 是分裂型单闭曲线时，则可对 $M^h-\Gamma$ 的两个连通支分别作单点紧化.

下面只讨论源鞍圈，对于渊鞍圈，情况是类似的.

定义 6. 设 L_1 是 M^h 上一条非零伦的源鞍圈. 记 $M_1^h=M^h-L_1$. 用 M^{h_1} 表示 M_1^h（当 L_1 为非分裂型）或 M_1^h 的某个指定的连通分支(当 L_1 为分裂型)的紧化曲面. 设 M^h 沿 $L_1,\cdots,L_{m-1}$ 的逐次分割紧化曲面已经作出，对 M^h 的源鞍圈 L_m，只要它在 $M^{h_{m-1}}$ 上仍是非零伦的，就可以类似地定义紧化曲面 M^{h_m}，其中 $2\leqslant m\leqslant h$. 称由上面的源鞍圈作成的序列 $L_1,\cdots,L_m$ 为 M^h 的一个长度为 m 的分割紧化序列.

引理 1. 设 C^1 流 f 是 M^h 上的 MS 系统，且无非零伦的

1）动力系统称为是 MS 系统，如果它只有有限个奇点和闭轨，都是双曲的；不存在任何鞍点联结，且每条轨线的 α 或 ω 极限集都是唯一的奇点或闭轨.

不稳定闭轨线。若 f 有 k_1 个渊点，k_2 个源点[1]，m 个源鞍圈[2]，则当 M^h 为可定向时不等式 $m \geqslant 2h + k_1 - 1$ 成立；当 M^h 为不可定向时不等式 $m \geqslant h + k_1 - 1$ 成立[3]。

证. 当 M^h 为可定向时，设 s 为鞍点个数，则有

$$s = 2h - 2 + k_1 + k_2.$$

进入这 s 个鞍点的分界线有 $2s$ 条。由于假定不存在非零伦的不稳定周期轨线，所以这些分界线只能来自 k_2 个源点。源点和鞍点的总数为 $s + k_2$。我们有

$$2s = (s + k_2) + (s - k_2 + 1) - 1.$$

应用 §8 定理 4 即知有

$$m \geqslant s - k_2 + 1 = 2h + k_1 - 1.$$

当 M^h 为不可定向时证明是类似的，只要改 $2h$ 为 h 即可。

引理 2. 设亏格为 $h \geqslant 1$ 的曲面 M^h 上的 C^1 流 f 是 MS 的，它不存在非零伦的不稳定闭轨，且至少存在一个孤立的源鞍圈 Γ[4]，那末必定存在一个长度为 $m+1$（其中 $m \leqslant h-1$）的分割紧化序列 $L_1, L_2, \cdots, L_{m+1} = \Gamma$，使 $M^{h_{m+1}}$ 是球面，且 Γ 在 $M^{h_i}(0 \leqslant i \leqslant m)$ 上仍为孤立源鞍圈。

此引理的证明较长，故从略，请读者参看原文[72]。

定理 4. 设 M^h 是可定向(不可定向)曲面，$h \geqslant 1$，其上有属于 C^1 类的 MS 动力系统 f. 若 f 至少存在一个孤立的(双侧)源鞍圈 Γ，则 M^h 上必定存在非零伦的周期轨线 L。

证. 设 M^h 上不存在非零伦的不稳定周期轨线(因此以后可以引用引理 1)，我们来证明 M^h 上必定存在非零伦的稳定周期轨线 L。

当 M^h 为 T^2 时，由引理 1 知 T^2 上至少存在 $k_1 + 1$ 条源

---

1) 包括普通的渊(源)点和广义的渊(源)点，当然也包括同伦于零的渊或源鞍圈。

2) 由前一附注可知这是指非零伦的源鞍圈。

3) 若在此引理中改不稳定周期轨线为稳定周期轨线，改源鞍圈为渊鞍圈，则在不等式中改 k_1 为 k_2。

4) 注意：即使在平面上，两个源鞍圈也可以有共同的源点，一个源鞍圈和一个渊鞍圈可以有共同的鞍点。

鞍圈，k_1 是 T^2 上的渊点个数，且已把每一零伦的闭轨及其内部都看成一个奇点。$M^h-\Gamma$ 现在是一个圆环域。其它 k_1 条源鞍圈把环域分隔成至少 k_1+1 个连通支，故其中至少有一连通支 D 不含渊点。由 Poincaré-Bendixson 定理知 D 内必存在稳定闭轨 L。按前面的约定知道 L 不是零伦闭轨。

当 $h\geqslant 2$ 且 M^h 为可定向时，由引理 2 知存在分割紧化序列 $L_1,\cdots,L_m,L_{m+1}=\Gamma$，在含 Γ 的 M^{h_m} 上重复前段的证明即知 M^h 上存在稳定非零伦闭轨。

再设 M^h 是不可定向的。由于此时已设 Γ 是双侧源鞍圈，故 $h\geqslant 2$。若 $h=2$，则 $M^h=K^2$，$K^2-\Gamma$ 是环域。由引理 1，$m\geqslant 2+k_1-1=k_1+1$，然后重复第一段的证明即可。

当 $h\geqslant 3$ 时，证法如前。已设 M^h 上不存在非零伦的不稳定周期轨线。由引理 2，知存在分割紧化序列 $L_1,\cdots,L_m,L_{m+1}=\Gamma$，使 M^{h_m} 是一环面或 Klein 瓶。由前面的分析知道可证 M^h 上必存在稳定的非零伦周期轨线。

注意1：可以证明对 Klein 瓶，可以去掉 Γ 是双侧的限制而得到同样的结论，见[72]。

注意2：如果 f 不是 MS 系统，则进人鞍点的分界线可能不来自源点或闭轨，这时 M^h 上就不一定存在非零伦的周期轨线，如图 9.3 所示。

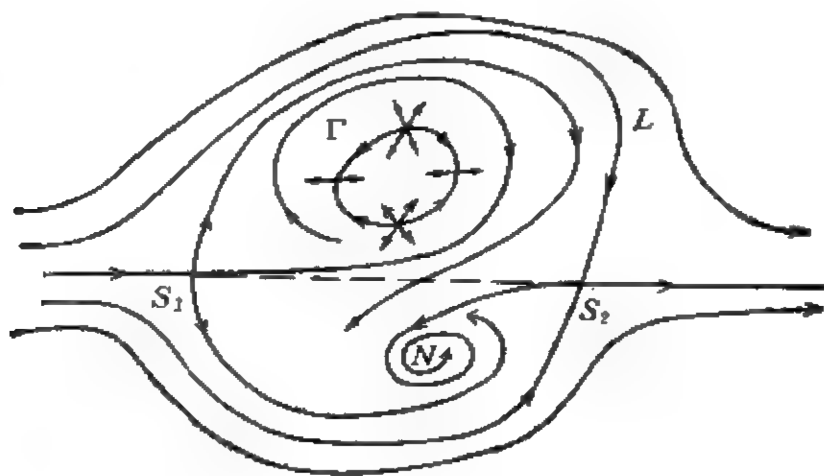


图 9.3

图中分界线 L 外部表示 T^2 上的非闭 P 式稳定流，L 内部有一源鞍圈 Γ，一个鞍点 S_1，和一个稳定焦点 N，L 上有一鞍点 S_2. 这个动力系统满足定理 4 的一切条件，但不是 MS 系统，也不存在非另伦的闭轨线。

最后介绍韩茂安的一个有趣的定理[73]：

定理 5. 设 f 为 PR^2 上的连续流，它有 n 个正向(负向)稳定奇点，则 f 至少存在 n 条互不相同的闭或奇闭轨线。

证. 仅就负向稳定奇点的情况来证明. 已知 PR^2 的二重覆盖空间是 S^2. 相应于流 f 和它的负向稳定奇点 $q_1, q_2, \cdots, q_n$, S^2 上有流 $\tilde{f}$ 和它的 $2n$ 个负向稳定奇点 $q_1^1, q_1^2, \cdots, q_n^1, q_n^2$. 故存在 $2n$ 个小圆盘 $D_1^1, D_1^2, \cdots, D_n^1, D_n^2$，分别包含上述负向稳定奇点，使 $\tilde{f}$ 的凡与 D_i^j 相遇的轨线，都从内部穿向外部. 现在扩大 D_1^1，并从 S^2 上切去一切 D_i^j 的内部. 于是我们就得到一个平面 $2n$ 重连通域 R_{2n}，它有 $2n-1$ 个洞. 由 §8 定理 6 知道，R_{2n} 中存在 $2n-1$ 条闭或奇闭轨线. 回到 PR^2 上去，可知 f 至少存在 n 条闭或奇闭轨线。

特别地，若 f 在 PR^2 上只有唯一的非退化奇点，则它至少有一条闭或奇闭轨线 L；由于奇点唯一，L 必为闭轨，而且是单边的. 当然，这时证明也可以直接在 PR^2 上进行，并应用 §4 的定理，而不必借助于 S^2。

§10. 闭曲面上连续流的奇点、闭轨、奇闭轨和 P 式稳定运动的闭包等之间的关系

在 §9 中我们研究了闭曲面上连续流的零伦与非零伦的闭或奇闭轨的存在性. 事实上,在可定向或不可定向闭曲面(或紧的有边界分支的曲面)上连续流的奇点、闭轨、奇闭轨,以至 P 式稳定运动的闭包的个数之间是存在着一定的关系的. 在这方面近年来朱德明[37],[74]和韩茂安[75]得到一些有趣的结果,他们用的工具正是前面几节,特别是 §8 所介绍的概念和方法. 本节将介绍上述三篇文章的主要结果.

定理 1. 设 M^g 为亏格 $g \geqslant 2$ 的闭可定向曲面, 则 M^g 上存在至多 $3g-3$ 条不同伦于零、亦不相互同伦且没有公共点的单闭曲线;对 $M^1=T^2$,这种曲线的条数是 1, 并且以上的数目是可以达到的.

证. 当 $g=1$ 时结论是明显的, 对 $g \geqslant 2$ 的情况我们采用归纳法, 先证 $g=2$ 时定理成立. 假设不对,则 M^2 上存在具有定理中所说的性质的四条单闭曲线 L_1, L_2, L_3, L_4. 记 $M^2-L_4=M' \cup M''$,下面根据 $M'=M''$ 与否分别进行考虑.

情况 I. $M'=M''$.

这时 M' 有两条边界, 记 $\overline{M'}=A_{x,y}(M')$ 为 M' 的两点紧化曲面. 若 L_1, L_2, L_3 中有一条,例如 L_1,在 $\overline{M'}$ 上同伦于零,则在 $\overline{M'}$ 上存在一圆盘 D,使 $L_1=\partial D$,且必有 $x, y \in D$, 因为 L_1 在 M^2 上既不同伦于零, 亦不同伦于 L_4. 由于 $\chi(\overline{M'})=1$, 故 $\overline{M'}$ 同胚于 T^2. 于是, L_2, L_3 在 $\overline{M'}$ 上不同伦于零, 亦不互相同伦,这是不可能的. 另一方面,如果 L_1, L_2, L_3 中任一条都不在 $\overline{M'}$ 上同伦于零,由于 $\overline{M'}$ 同胚于 T^2,故三者之中任二者在 $\overline{M'}$ 上互相同伦.不妨设它们都属于$(1,0)$型的环面单闭曲线.于是在L_1,

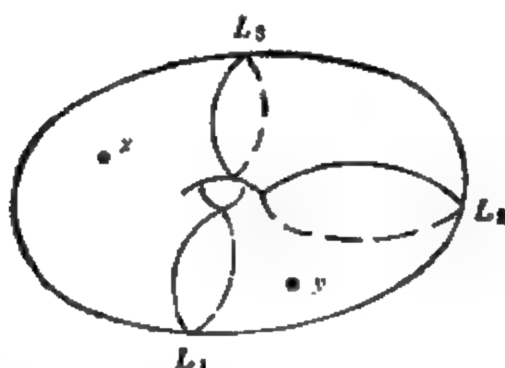


图 10.1

L_2, L_3 中可以找到两条，例如图 10.1 中的 L_2 与 L_3，使它们所围的一段环面不含 x 与 y，这说明 L_2 与 L_3 在 M^2 上互相同伦，与假设矛盾。

情况 II. $M' \neq M''$。

此时 M' 与 M'' 都有亏格 1． 在 L_1, L_2, L_3 中至少有两条位于同一子流形上，不妨设 L_1, L_2 同位于 M' 上．注意 M' 只有一个边界分支，易见 L_1, L_2 在 $A_x(M')$ 上都不同伦于零． 但 $A_x(M')$ 同胚于 T^2，故 L_1 与 L_2 在 $A_x(M')$ 上互相同伦，从而也在 M^2 上互相同伦，与假设矛盾。

现在假设定理对亏格 $\leqslant g-1$ 的可定向闭曲面已获证明。今设 M^g 是一亏格为 g 的可定向闭曲面，在其上存在 $3g-2$ 条不同伦于零，亦不相互同伦且没有公共点的单闭曲线 $L_1, \cdots, L_{3g-2}$。设 $M^g - L_{3g-2} = M' \cup M''$。

情况 I. $M' = M''$。

这时 M' 的两点紧化闭曲面 $\bar{M}' = A_{x,y}(M')$ 具有亏格 $g-1$。

a) 设在 $L_1, \cdots, L_{3g-3}$ 之中有一条，例如 L_{3g-3} 在 $\bar{M}'$ 上同伦于零。则 $\bar{M}'$ 上存在一圆盘 D 使 $L_{3g-3} = \partial D$，且 D 含有 x 及 y 两点。 于是 $L_1, \cdots, L_{3g-4}$ 中任一条都不在 $\bar{M}'$ 上同伦于零，任二者都不在 $\bar{M}'$ 上互相同伦，但 $3g-4 > 3(g-1)-3$，与假设矛盾。

b) 设一切 $L_1, \cdots, L_{3g-3}$ 在 $\bar{M}'$ 上都不同伦于零，我们要证

明其中至多有两条曲线是相互同伦的. 事实上，设 $\overline{M}'$ 上有两对相互同伦的曲线，例如 $L_1 \sim L_2, L_3 \sim L_2'$（$L_2'$ 可能是 L_2，也可能不是），则 L_1 与 L_2 包围一段柱面 H，H 含有一点 x. L_3 与 L_2' 包围一段柱面 H'. 如果 $y \notin H'$，则 $x \in H'$，从而 $H \cap H'$ 也是 $\overline{M}'$ 上的一段柱面(图 10.2)。

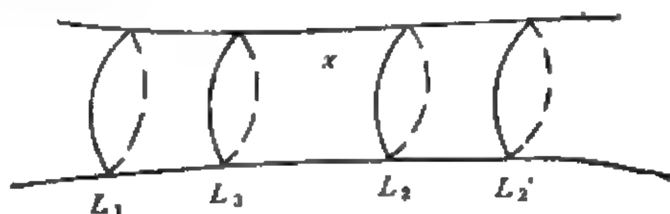


图 10.2

由此可见 L_1（或 L_2）与 L_3（或 L_2'）将包围一段柱面，其中不含 x，因而这两条曲线也应该在 M^g 上相互同伦，与假设矛盾。因此，必有 $y \in H'$（图 10.3）。注意：若 $L_2 \neq L_2'$，不妨设 $L_2' = L_4$，则有 $3g-5$ 条单闭曲线

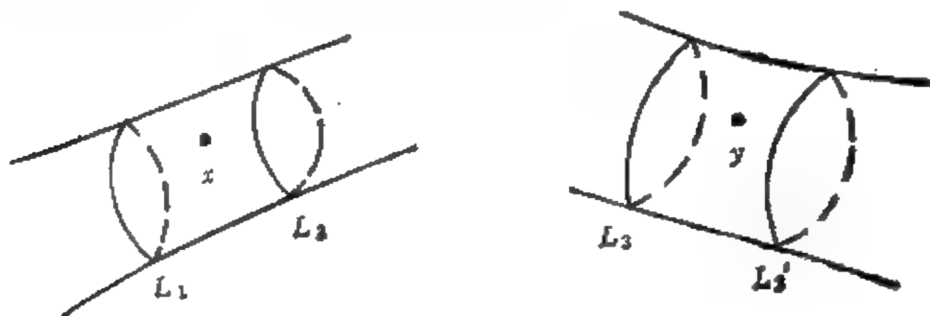


图 10.3

$$L_1, L_3, L_5, L_6, \cdots, L_{3g-3} \text{（当 } L_2 \neq L_2' \text{ 时）}$$

或

$$L_1, L_4, L_5, \cdots, L_{3g-3} \text{（当 } L_2 = L_2' \text{ 时）}$$

在 $\overline{M}'$ 上不同伦于零，亦不相互同伦. 但

$$3g-5 > 3(g-1)-3,$$

仍与归纳法的假设相矛盾.

情况 II. $M' \neq M''$.

于是我们可以作两个单点紧化曲面 $A_x(M')$ 与 $A_y(M'')$. 先

证：

引理1. 设 M_i 是亏格为 g_i 且有 k_i 个边界分支的可定向紧曲面 ($i=1, 2$)，将 M_1 与 M_2 沿着各自的 r 条边界粘合而得紧曲面 M，$r\leqslant\min\{k_1,k_2\}$，则$M$的亏格为 $g=g_1+g_2+r-1$。

证. M_i 的 Euler 特征为 $\chi(M_i)=2-2g_i-k_i$, $i=1,2$. M的 Euler 特征为 $\chi(M)=2-2g-(k_1+k_2-2r)$。但 $\chi(M)=\chi(M_1)+\chi(M_2)$，故 $g=g_1+g_2+r-1$。

推论1. 设M为可定向闭曲面，L是M上一条不同伦于零的单闭曲线，$M-L=M_1\cup M_2$ 且 $M_1\neq M_2$，则 $g=g_1+g_2$，这里 g, g_1, g_2 分别是 M, M_1, M_2 的亏格。

现在回到定理的证明。由上述推论知道 $A_2(M')=\bar{M}'$ 与 $A_2(M'')=\bar{M}''$ 的亏格 g_1 与 g_2 之和为 g。不妨设

$$L_1, L_2, \cdots, L_{n_1}\in M', L_{n_1+1}, \cdots, L_{3g-3}\in M'',$$

且 $n_1>3g_1-2$。否则，若 $n_1\leqslant 3g_1-2$，$3g-3-n_1\leqslant 3g_1-2$，则相加可得 $3g-3\leqslant 3g-4$，矛盾。

今对 $i=1,2,\cdots,n_1$，L_i 都不同伦于零，它们之中至多有两条互相同伦。于是在 $\bar{M}'$ 上至少有 $n_1-1\geqslant 3g_1-2\geqslant 3g_1-3$ 条单闭曲线不同伦于零，亦不相互同伦。故若 $g_1\geqslant 2$，则与假设相矛盾.如果 $g_1=1$，则我们有 $n_1\geqslant 2$，而 $\bar{M}'$ 同胚于 T^2，矛盾.定理的前半部证毕。

为了证明定理的后半部，只须注意图 10.4。其中 $g=4$，闭曲

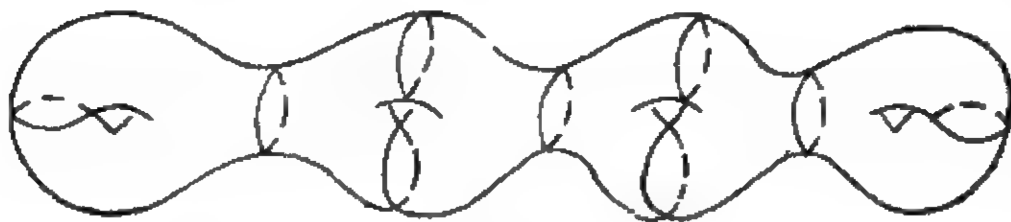


图 10.4

面 M^4 上的这 9 条单闭曲线显然满足定理的条件。

注意：这一结果使人联想起代数曲线论中的参模表示问题。

Riemann 证明：所有互不同构的，亏格等于 1 的紧黎曼面组成一个依赖于 1 个复参数的空间(见[76]第一章定理 3.9)，并猜想：所有互不同构的亏格等于 $g \geqslant 2$ 的紧黎曼面组成一个依赖于 $3g-3$ 个复参数的空间。这个猜想直到 40 多年前才被 Teichmüller 所证实。我们猜测也许定理 1 的结论早在 Riemann 的时候就知道了。

定理 2. 设 M 是亏格 $g \geqslant 2$ 的闭可定向曲面，f 是 M 上的连续流。则 f 最多有 $3g-3$ 个不同伦于零亦不相互同伦的闭轨，并且这个数目是可以达到的。

证. 前半部由定理 1 的前半部的证明可以推出，因为 f 的不同的闭轨不能有公共点。后半部可由图 10.4 看出，我们可以把图 10.4 两头的两个环柄改以如图 10.5 的充满闭轨，一个中心和两个

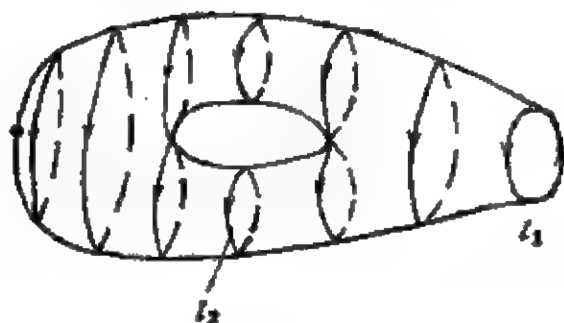


图 10.5

8 字形的奇闭轨的环柄来代替，在其中可以找到两条不同伦于零亦不相互同伦的闭轨 l_1 和 l_2。至于图 10.4 的中间部分，则保持原来的单闭曲线作为 f 的闭轨，并用其它的闭轨和 8 字奇闭轨来充满它。这样，图 10.4 中不相互同伦亦不同伦于零的闭轨个数仍保持为 9 条。证毕。

推论 2. 设 M^g 有亏格 g，可定向，且有 r 个边界分支，则其上不同伦于零，亦不相互同伦，且彼此无公共点的单闭曲线的条数满足不等式：

$$s \leqslant \begin{cases} 3g-3+2r, \text{ 对 } g \geqslant 2, r \geqslant 0; & (1) \\ g+2r-1, \text{ 对 } g=1, r \geqslant 1; & (2) \\ 2r-2, \text{ 对 } g=0, r \geqslant 2. & (3) \end{cases}$$

并且其中的等式总能达到。

证. (1) 式当 $r=0$ 时由定理 1 知其成立. 今设 $r=1$. 则 s 条中最多有一条可以在不带边的 M^g 上同伦于零，且至多再有一条可在 $A_s(M^g)$ 上与另一条同伦，故有 $s-2\leqslant 3g-3$，从而 $s\leqslant 3g-1$，故(1)式对 $r=1$ 成立. 用归纳法易证(1)式对任何正整数 r 都成立. (2)与(3)的证明更简单.

由推论 2 又可得到相应的、有关连续流的闭轨的结论.

[75] 中还把定理 1 推广到有 P 式稳定轨线闭包的连续流上去，而得到:

定理 3. 设 f 为亏格 $g\geqslant 2$ 的可定向闭曲面 M^g 上的连续流，它有 R 个不同的 P 式稳定轨线闭包，n 条不同伦于零亦不相互同伦的闭轨，则:

1) $R+n\leqslant 3g-3$;

2) 存在一连续流 f 使 $R=g-1, n=2g-2$.

证明从略，见[75].

下面假设 f 为亏格 g 的紧曲面 M^g 上的连续流，只有有限多个奇点. 如果 M^g 的边界 ∂M^g 非空，则假设 f 与 ∂M^g 处处相切. 以 $\gamma_x=f(x,I)$ 记 f 的经过点 x 的轨线，它的 $\omega(\alpha)$ 极限集记为 $\omega(x)(\alpha(x))$[1]. 对 M^g 中任一点集 D，记

$$A(D)=\bigcup\{\alpha(x)\mid x\in D\}, \Omega(D)=\bigcup\{\omega(x)\mid x\in D\}. \tag{4}$$

关于 f 的正常轨线与回归轨线的定义已见于 §2 定义 9. 现在把 §8 中的广义源点(渊点)的概念在 M^g 上作进一步的推广:

定义 1. M^g 上一连通闭集 F(特别地可以是一个奇点，极限环，或源鞍圈，渊鞍圈，但 F 不一定是流的不变集)称为是一个广义源(渊)，如果 ∂F 的每一连通支是一条 Jordan 曲线或一点，又存在开集 $U\supset F$，使

$$A(U)(\Omega(U))\subset F, \text{而 } \Omega(U-F)(A(U-F))\subset M^g-U. \tag{5}$$

1) 与§7的定义不相同.

若F在M上同伦于零，则称为第一类广义源(渊)，否则，称为第二类。

引理 2. 在广义源(渊)F的边界 ∂F 的每一连通支 C 的外邻域中必有一同伦于C的闭横截线。

证略。

定义 2. 如果对定义 1 中的F及 $U, U-F$ 中每一位于 ∂F 的任一连通分支的邻域中的轨线的 $\alpha(\omega)$ 极限集都是 ∂F 的这个分支，则称F为广义焦点。

今设

$$M_s = \cup\{m_i | i = 1,2,\cdots,s\},$$

其中 $m_i(i = 1,2,\cdots,s)$ 为连续流 f 的普通奇点或广义焦点。

定义 3. 若曲线 $L \subset M^g$ 是由某一 M_s 中的普通奇点和广义焦点以及联接它们的轨线所构成，且当每一广义焦点被看成一点时L是 M^g 上的一条单闭曲线(圆 S^1 在 M^g 中的拓扑象)，则称L为奇闭轨线。特别地，当L上的广义焦点都是第一类广义源(渊)，且当每一L上的广义焦点都被看成一点时，L本身也同伦于零，则称L为第一类奇闭轨线；否则，L称为第二类的。

定义 4. 若G是第一类奇闭轨线L所围的区域，则G以及L上一切普通奇点和第一类广义焦点一起构成一个广义奇点。

定义 5. 如果定义 3 中的 M_s 除了普通奇点和广义焦点以外，也可以含有广义奇点，则所得的L称为广义奇闭轨。

现在把 §8 的特殊分界线的概念推广到更一般的情况中去。

定义 6. 设 O 是普通奇点(但不是源点和渊点)或广义奇点(但不是广义焦点)，l 是跑出(进入)O的抛物轨线。如果 l 的两边都是双曲域，则称 l 为甲类分界线(同一抛物域中的轨线只考虑一条)。如果 l 的两边至少有一边不是双曲域，则称 l 为乙类分界线。对于源(渊)点或广义焦点，我们算作从它跑出(进入)一条丙类分界线。

注意 1：这里的甲类分界线就是 § 8 的特殊分界线，但乙类分界线与[67]中的定义略有不同。丙类分界线是新定义的。

注意 2：在 §8 中我们曾证明过：如果从 O 点出发的特殊分界线 l 又回到 O 点，则 l 内部必含有别的奇点. 现在如果我们考虑的椭圆域是 §8 中所说的最大椭圆域，又设定义 6 中的乙类分界线 l 从奇点 O 出发，最后重又回到 O，并且 l 在 M^g 上同伦于零（对曲面上的甲类分界线，如果它要有"内部"，也必须同伦于零），则 l 内部亦必包含奇点. 这从图 10.6 中的三个图可以看出.

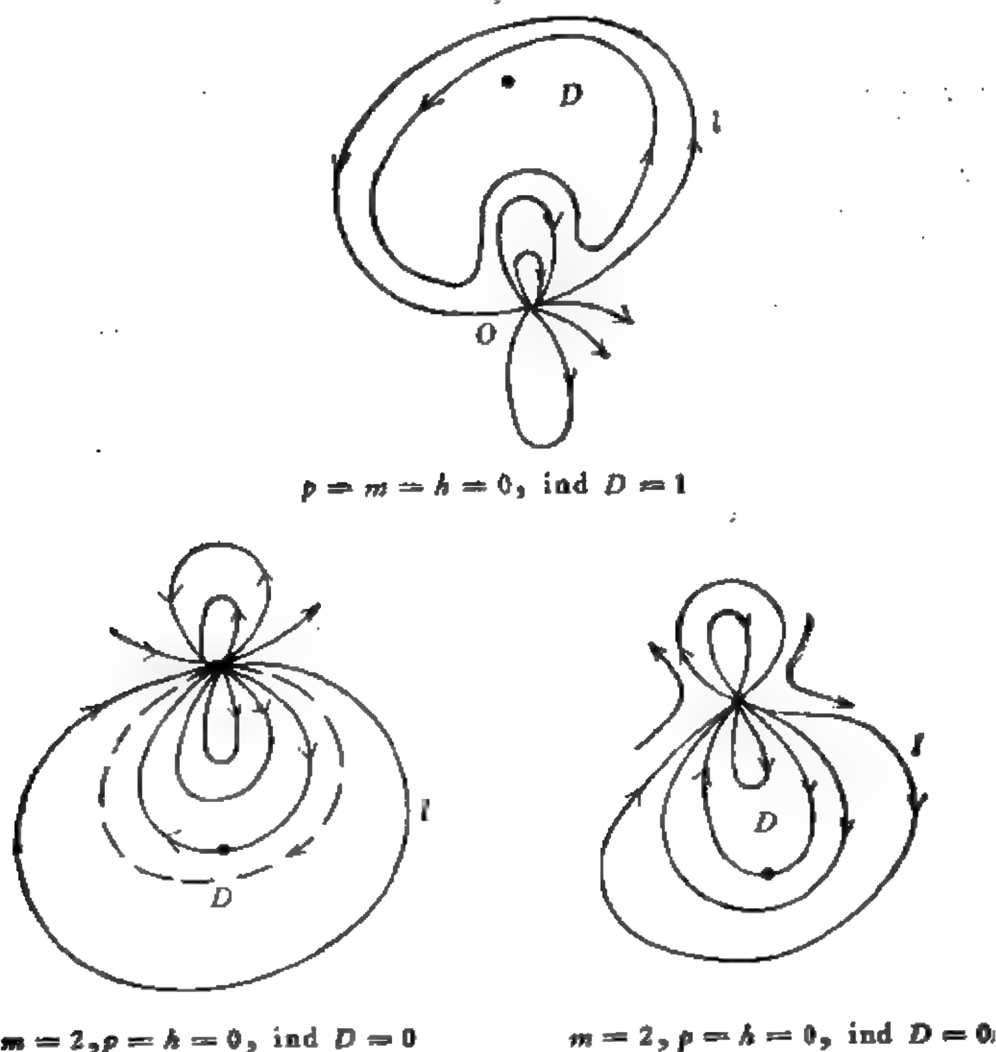


图 10.6

象 §8 引理 2 那样可以证明：

引理 3. 设普通奇点 O 的指标为 K，从 O 跑出（进入）的乙类分界线的条数为 $M(M')$，则

$$M(M') \geqslant \begin{cases} 0, & \text{当} K \leqslant 0 \text{时}, \\ K-1, & \text{当} K > 0 \text{时}, \end{cases} \tag{6}$$

与 §8 引理 3 相当，对于乙类分界线现在有：

引理 4. 设 M^g 上的连续流 f 的所有奇点的指标之和为 K，其中指标为 $+1$ 的奇点有 r 个，那么从一切奇点跑出(跑进)的乙种分界线的条数为

$$M(M') \geqslant \begin{cases} 0, & \text{当} K \leqslant r \text{时}, \\ 1, & \text{当} K > r \text{时}. \end{cases} \tag{7}$$

证. 由于 $r \geqslant 0$，当 M^g 为可定向时 $K = 2 - 2g \leqslant 2$，当 M^g 为不可定向时 $K = 2 - g \leqslant 1$，故$K > r$ 只有

$$K = 2, r = 1, 0 \text{ 与 } K = 1, r = 0$$

三种情况. 在前二种情况，M^g 为球面，其上如果只有一个指标 $+1$ 的奇点，则至少还应有一指标 $\geqslant 2$ 的奇点 O，显见至少各有一条乙类分界线进入和离开 O. 如果没有指标 $+1$ 的奇点，情况也是一样，在第三种情况，PR^2 上也至少还应有一指标 $\geqslant 2$ 的奇点 O，证明同上[1].

定义 7. 由具有鞍状区的奇点和联接这些奇点的轨道构成的可定向奇闭轨 L，使得在它的一边可以定义 Poincaré 的返回映射者，称为特殊奇闭轨.

§9 定理 1 中所说的自由源点 P 的负向吸引区域的边界，如果不是闭轨，但在其内邻域又可以定义 Poincaré 的返回映射，则必为特殊奇闭轨.

定理 4. 设 F 是 M^g 上的连续流 f 的一个广义源，$M^g - F$ 中最多含有 n 个普通奇点. 则对应于 ∂F 的每一连通支 C_i，必存在一围绕 C_i 的闭或奇闭轨线 l_i (当 C_i 在 $M^g - F$ 中同伦于零时 l_i 可能退缩为一点).

证明与 §8 最后(定理 5 的新证法)类似，从略. 此定理显然是 §8 定理 5 的推广. 易见，如果把定理 4 的条件加强，则有：

---

1) 引理中的"指标 $+1$ 的奇点有 r 个"不能改为"源点与汇点共有 r 个"，否则(7)的第二个不等式当 $K = 1$，$r = 0$ 时不一定成立，参见图 10.7.

定理 5. 在定理 4 的条件之下，如果 ∂F 的某一连通支 C 是 f 的横截线，且对每一 $x\in C$，$\omega(x)$ 总含有常点。则必存在一围绕 C 的闭或特殊奇闭轨 Γ，它与 C 在 M^2 上是同伦的。

注意：Γ 有可能是单边闭轨。例如，若 M^2 为 PR^2，其上只有唯一的广义源和它的单连通排斥域，则此排斥域的境界是单边闭轨 Γ（图 10.7）。

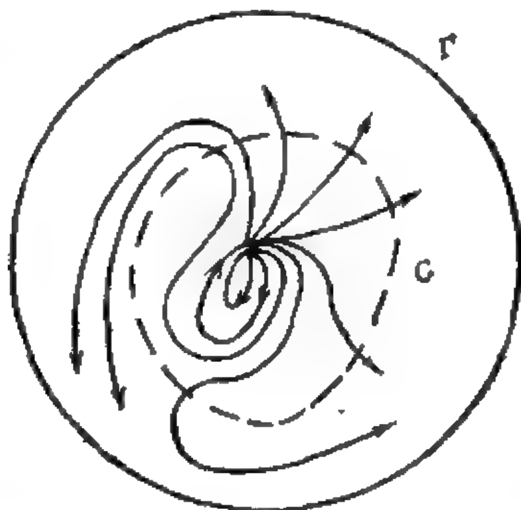


图 10.7

定理 6. 设 Möbius 带 B_2 上的连续流 f 切于 B_2 的边界，又 f 在 B_2 上至多有有限个奇点。则 f 必存在异于边界且不同伦于零的闭或奇闭轨。

证. 设 f 在 B_2 上有 n 个奇点。若 $n=0$，则对任一点 x，$\omega(x)$ 与 $\alpha(x)$ 都是非零伦的闭轨，因为在 M 上没有 P 式稳定轨线。

又设 $n>0$，则 n 个奇点的指标之和为零。今设不存在异于边界的非零伦闭轨。我们把一切零伦闭轨及其内部，零伦奇闭轨及其内部都看做广义奇点，设由此所得的广义奇点再加上剩下的普通奇点一共有 n' 个。由 §8 引理 3，知道从这些奇点跑出（进入）的甲类分界线的条数为 $N(N')\geqslant n'$。不妨设 ∂B_2 为 f 的一不稳定闭轨 Γ，故从它又跑出丙类分界线一条，并且把 Γ 看成一个新的广义奇点。于是 B_2 上奇点的总数为 $n'+1$，甲、乙、丙三类

分界线的总数$\geqslant n'+1$．现在应用§8定理4，因为$n'+1=(n'+1)+(1)-1$，故知这些分界线至少构成一条奇闭轨，按前面的约定知道这条奇闭轨不能同伦于零。定理证毕。

定理 7. 设 K^2 上的连续流 f 至多有有限个奇点。则：

1）至少存在一条非零伦的闭轨或奇闭轨。

2）若存在双边（单边）闭或奇闭轨 L，它不含甲、乙或丙类分界线，且 L 代表 $\pi_1(K^2)$ 的元素 $k^{\pm 2}(k^{\pm 1}h^{n})$，则必还存在其它的非零伦闭或奇闭轨。

证. 1）的证明类似于定理6的证明，故从略。

2）注意 L 上一个广义奇点 S。假设它的外边界已缩成一点。由于 L 的每一边都无抛物域，故在 S 的双曲域个数应比椭圆域多两个，且椭圆域上轨线的方向都一致，由 Bendixson 公式知 S 的指标为零，因此不妨设 L 是一闭轨。

今若 L 属于 $k^{\pm 2}$ 型，则 L 为双边曲线，K^2-L 有两个连通支，每一个都是 Möbius 带，由定理6即得结论。

若 L 属于 $k^{\pm 1}h^{n}$ 型，则 K^2-L 为一 Möbius 带，定理如前得证。

定理 8. 设 M^g 为可定向（不可定向）的亏格为 g 的闭曲面，f 为 M^g 上的连续流，只有有限多个奇点。则有不等式

$$R+c+2N\geqslant 2g-1\quad(\geqslant g-1), \tag{8}$$

其中 N 是不同伦于零亦不相互同伦的闭轨或特殊奇闭轨的个数，R 是不同 P 式稳定轨线闭包的个数，c 是其它奇闭轨的个数。

本定理是下面定理9的特例。

定义 8. 设 L 与 $L_1,\cdots,L_k$ 为 M^g 上的 $k+1$ 条互不相交的 Jordan 曲线，称 L 为与 $L_1,\cdots,L_k$ 同伦相关，如果 L 在 $M-\bigcup_{i=1}^{k}L_i$ 的紧化流形（可能有几个连通支）上同伦于零。互不相交的 Jordan 曲线族 $\{L_i\}$ 称为彼此同伦无关，如果其中任何一条都不和其它诸条同伦相关。

显见，同伦无关的 Jordan 曲线族的子族亦必为同伦无关。

定义 9. 设 $\mathfrak{A}$ 是 M^g 上所有非零伦的闭轨与特殊奇闭轨所成的集合，$L_1, \cdots, L_N$ 为其中的最大同伦无关的集合。假设 N_1 是最大的整数，使 $M_{N_1} = M^g - \bigcup_{j=1}^{N_1} L_{i_j}$ 为连通（i_j 取值于 $1,2,\cdots N$），而 $M_{N_1} - L_k$ 为不连通，对 $k \neq i_j$。则 N 称为 M^g 上闭轨与特殊奇闭轨族的秩数，N_1 为非分裂数，$N_2 = N - N_1$ 为分裂数。

当 M^g 为不可定向时不妨设 $L_1, \cdots, L_s (0 \leqslant s \leqslant N_1)$ 为单边曲线，$L_{s+1}, \cdots, L_{N_1}$ 为双边曲线。

定理 9. 设 f 为亏格 g 的可定向闭曲面 M^g 上的连续流，它只有有限个奇点，则

$$R + c + 2N_1 + N_2 \geqslant 2g - 1, \quad N_1 + R \leqslant g. \tag{9}$$

证. 设 f 的奇点个数为 n，它们的指标之和为 K。当 $n = 0$ 时 M^g 只能是 T^2，即 $g = 1$。若 $R = 0$，则显见 T^2 上必有非零伦的闭轨，若其条数多于 1，则必相互同伦，故(9)式成立。若 $R = 1$，则 T^2 上没有非零伦闭轨，$N_1 = N_2 = 0$，(9)式也成立。

今设 $n > 0$。设 $L_1, \cdots, L_N$ 是 f 的最大同伦无关的闭轨与特殊奇闭轨的集合。先证(9)中的第二个不等式。沿 $L_1, \cdots, L_{N_1}$ 切开 M^g，并依次作 M^g 的点紧化，最后得到 $M^*_{N_1}$。假设其亏格为 h^*，则

$$\chi(M^g) + 2N_1 = 2 - 2g + 2N_1 = \chi(M^*_{N_1}) = 2 - 2h^*,$$

从而

$$h^* = g - N_1. \tag{10}$$

由于已知 $R \leqslant h^*$，故 $R + N_1 \leqslant g$，即(9)的第二个不等式成立。

今再沿 $L_{N_1+1}, \cdots, L_N$ 切开 $M^*_{N_1}$，并逐次作两点紧化，最后得到 $N_2 + 1$ 个闭曲面 $M_1, \cdots, M_{N_2+1}$。以 χ_i, g_i, R_i, c_i 依次记这些曲面的 Euler 特征，亏格，不同 P 式稳定轨线闭包的个数以及除特殊奇闭轨以外的奇闭轨个数，则易见

$$\chi(M^*_{N_1}) + 2N_2 = 2 - 2h^* + 2N_2$$

$$= \sum_{i=1}^{N_2+1} \chi_i = 2(N_2+1) - 2\sum_{1}^{N_2+1} g_i,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{N_2+1} g_i = h^*.$$

由定义 9 知 $g_i \geqslant 0$，且 M_i 上一切闭轨与特殊奇闭轨都同伦于零。把这些 Jordan 曲线所包围的单连通域看成广义奇点，设 M_i 上一切广义奇点与不包含在它们内部的普通奇点的总和为 n_i，它们的指标总和应是 $K_i = 2 - 2g_i$。

由 §8 引理 3，知道从 n_i 个奇点跑出的甲类分界线的条数为

$$\mathfrak{N}_i \geqslant n_i - K_i = 2g_i + n_i - 2.$$

现在研究这 $\mathfrak{N}_i$ 条分界线的 ω 极限集。为此，把每一 P 式稳定轨线的闭包看成一点，则有

$$n_i + 2g_i - 2 = (n_i + R_i) + (2g_i - R_i - 1) - 1,$$

从而由 §8 定理 4 知道

$$c_i \geqslant 2g_i - R_i - 1, \text{即 } R_i + c_i \geqslant 2g_i - 1. \tag{11}$$

易见 $R = \sum_{i=1}^{N_2+1} R_i$，$c = \sum_{i=1}^{N_2+1} c_i$，把(11)式关于 i 相加，再用(10)式，即得

$$R + c + 2N_1 + N_2 = \sum_{i=1}^{N_2+1} R_i + \sum_{i=1}^{N_2+1} c_i + 2N_1 + N_2$$

$$\geqslant 2\sum_{i=1}^{N_2+1} g_i - (N_2+1) + 2N_1 + N_2$$

$$= 2h^* + 2N_1 - 1 = 2g - 1,$$

这就是(9)的第一个不等式。

注意 1：不等式(8)比(9)的第一个不等式强，所以定理 8 是定理 9 的推论。

注意 2：由(9)的第二式知道，若 M^g 上连续流 f 的非分裂

数为 g,则 f 没有非闭 P 式稳定轨道。

注意 3：把(9)的两个不等式相减，可得

$$c + N \geqslant g - 1 \geqslant 1,\text{当 } g \geqslant 2 \text{ 时。}$$

即当 $g \geqslant 2$ 时，连续流 f 必存在非零伦的闭或奇闭轨线，不论 R 是否为零。

注意 4：对不可定向闭曲面，[74]也证明类似于(9)的两个不等式：

$$R + c + 2N_1 + N_2 \geqslant g + s - 1,$$

$$\left[2s + 1 - \frac{(-1)^h}{4}\right] + N_1 + R \leqslant \left[\frac{h-1}{2}\right] + s + 1.$$

证明从略。

如果把至少一边为稳定的闭轨与特殊奇闭轨以及正向 P 式稳定轨线的闭包都看成广义奇点，又注意从广义奇点跑出的分界线不可能进入普通源点，则由 §8 引理 3 与定理 4 不难证明：

定理 10. 设 M^g 为可定向(不可定向)亏格为 g 的闭曲面，f 为 M^g 上的，只有有限个奇点的连续流，则有

$$R_1 + c + n \geqslant 2g + k - 1 \qquad (k + g - 1), \qquad (12)$$

其中 n 是至少有一边为稳定的闭轨与特殊奇闭轨线的条数；$R_1 \leqslant R$，R_1 是正向 P 式稳定轨线的闭包数；k 是不稳定奇点的个数；c 是其它奇闭轨数。

证. 设 N 是普通奇点的总数，那么现在我们考虑的普通奇点与广义奇点的个数为 $R_1 + n + N - k$，跑出的轨线至少有 $N - K - N + 2g - 2$ 条(可定向的情况)，由于

$$N + 2g - 2 = (R_1 + n + N - k) + (2g - R_1 - n + k - 1) - 1,$$

故由此可知至少存在

$$c \geqslant 2g - R_1 - n + k - 1$$

条其它奇闭轨[1]，上式即不等式(12)。

1) 如果 $2g - R_1 - n + k - 1 < 0$，则上述推理不能用，但此时有 $R_1 + n > 2g + k - 1$，由于 $c \geqslant 0$，故(12)式仍成立。

不可定向曲面的情况只要改用 $2-g$ 代K即可。

例 1. 设在环面 T^2 上的连续流 f 有一不稳定结点 O，一鞍点 S 和一个半稳定第二类极限环 Γ。它是 Cherry 的著名例子[20]

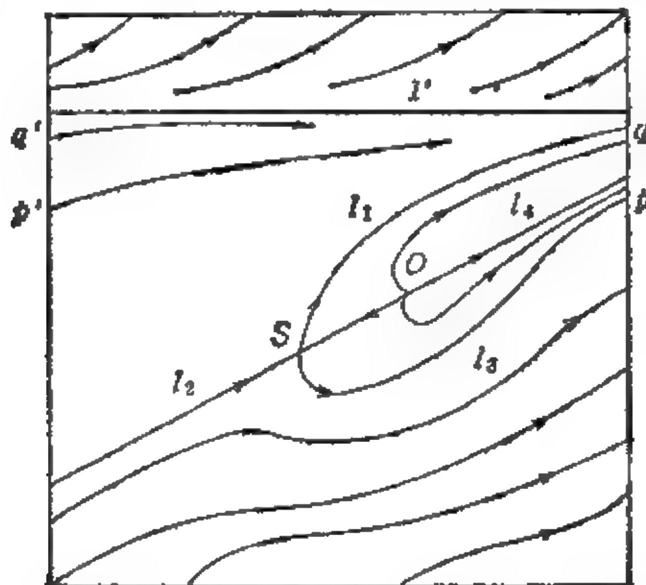


图 10.8

的改造。由于增加了 Γ，故已不出现非闭 P 式稳定轨线。现在(12)式中有 $R_1=0$，$n=1$，$g=1$，$k=1$，故由

$$0+c+1\geqslant 2+1-1=2$$

知 $c\geqslant 1$，图 10.8 中一条不明显的奇闭轨是由 S，Γ 以及由 S 跑出而趋向 Γ 的两条分界线 l_1,l_3 所构成的。

如果把 Γ 看成广义焦点，跑出一条丙类分界线 l_2，从 O 也跑出一条丙类分界线 l_4，加上从 S 跑出的两条甲类分界线，共有四条。由

$$4=3+(2)-1$$

知道至少还有两条奇闭轨线，结果比定理 10 更好。添加的另一条奇闭轨线，由 O,S,Γ 以及 l_2,l_4 所构成。

如果 Γ 不存在，则得 Cherry 流(图 10.9)。这时 $n=0,R_1=1$，要(12)式成立，仍只须 $c\geqslant 1$。例如，可以取 S,l_1,l_3 以及广义奇点 G(P 式稳定轨线的闭包)构成奇闭轨。[20]中证明 l_1 与 l_3 是正向 P 式稳定轨道，其闭包 G 在 T^2 上是无处稠密的，它与某一横

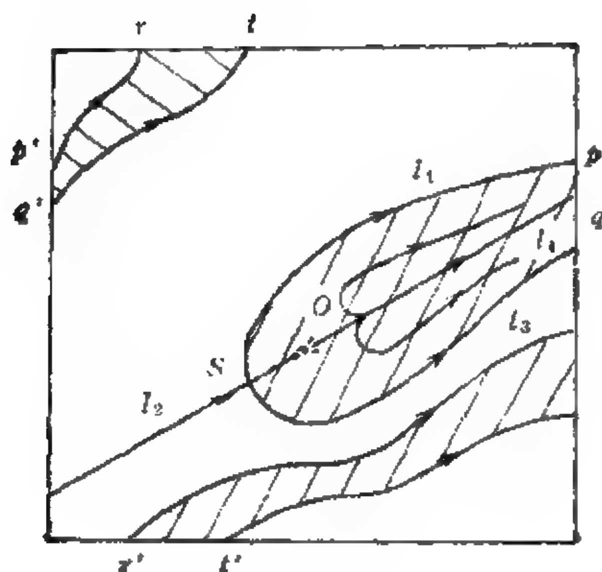


图 10.9

截圆的交集是 Cantor 集。

如果把O点以及从它跑出的一条丙类分界线 l_4 也考虑在内的话，那么除了前段所说的奇闭轨线以外，还有由 G,S,O,l_4 以及 l_2（从G跑出的丙类分界线）构成的奇闭轨。与前一奇闭轨线不同之处，是现在连接轨线 l_2 和 l_4 不属于 G 了。

下面转而研究不可定向闭曲面 M^2 上连续流 f 的互不相遇，且其全体不把 M^2 分割为不连通集的单边与双边闭轨的最多条数。这问题对于可定向闭曲面（这时不存在单边闭曲线）或是对不可定向闭曲面上的单边闭曲线来说，都是早已解决了的。

设 n 表示 f 的奇点个数，k 与 k' 分别表示源点和渊点的个数，它们都必具有指标 $+1$。记 $m=\max\{k,k'\}$。

首先，证明 PR^2 上连续流的一个性质。

定理11. 设 f 为 PR^2 上的连续流，其奇点的个数有限，则 PR^2 上至少存在一条闭轨或奇闭轨。特别是：

1）若只有唯一的奇点，且为初等，或存在一闭的横截线，使奇点都在它的同一边，则必存在一条单边奇闭轨。

2）若 $k=k'=0$ $(k+k'>0)$，则存在至少两条（m 条）闭或奇闭轨线，这些奇闭轨，至少有一条是单边的。

证. 1) 的证明已见 § 4 定理 6 推论 3. 为了证明2),先给出两个引理.

引理 5. 对于 PR^2 上的连续流 f,设奇点个数有限,为 n 个(同伦于零的闭或奇闭轨线连同其内部一起作为一个广义奇点看待); k 与 k' 表示上述奇点中源点和渊点的个数(其中也包括广义的,如极限环). 则跑出(进入)奇点的甲和乙类分界线条数 $N(N')$ 和 $M(M')$ 分别满足不等式:

$$N(N') \geqslant \begin{cases} n-1, & \text{当 } k+k'>0 \text{ 时;} \\ n, & \text{当 } k=k'=0 \text{ 时;} \end{cases} \tag{13}$$

$$M(M') \geqslant \begin{cases} 0, & \text{当 } k+k'>0 \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } k=k'=0 \text{ 时.} \end{cases} \tag{14}$$

证明由本节引理 3,4 和 §8 引理 3 立刻得出只须注意对 PR^2,其上奇点的指标总和 $K=1$, 并且对指标 $+1$ 而有椭圆域与双曲域(其个数必定相等)象图 10.7 中那样的奇点, 我们可以设想先把它们的椭圆域缩成一点,从而双曲域也随之消失,于是都可以当做源点或渊点来看待,因此本节引理 4 就可以应用了. 这时 $K>r$ 就相当于 $k=k'=0, K\leqslant r$ 就相当于 $k+k'>0$.

引理 6. 设 $T(T')$ 表示从一切奇点跑出(跑进)的甲、乙、丙三类分界线的总和,则有:

$$T \geqslant M+N+k \geqslant n+k-1, \text{当 } k+k'>0 \text{ 时,} \quad \geqslant n+1, \quad \text{当 } k=k'=0 \text{ 时,} \tag{15}$$

$$T' \geqslant M'+N'+k' \geqslant n+k'-1, \text{当 } k+k'>0 \text{ 时,} \quad \geqslant n+1, \quad \text{当 } k=k'=0 \text{ 时.} \tag{16}$$

证明可由引理 5 立刻推出.

下面证明定理 11 的 2).

假设 σ 是不同伦于零的闭轨个数, d 是不同伦于零的特殊奇闭轨个数. 考虑从诸奇点跑出的 T 条分界线,它们的 ω 极限集除了 n 个奇点外,还可能是 $\sigma+d$ 条闭和奇闭轨线. 由(15)的第一式得

$$T \geqslant n+k-1=(n+\sigma+d)+(k-\sigma-d)-1,$$

故当 $k>0$ 时，f 的闭和奇闭轨的总数不少于

$$(k-\sigma-d)+\sigma+d=k$$

条。仿此，当 $k=0$ 时由(15)的第二式得

$$T\geqslant n+1=(n+\sigma+d)+(2-\sigma-d)-1,$$

故 f 的闭和奇闭轨的总数不少于

$$(2-\sigma-d)+\sigma+d=2$$

条[1]。$k'>0$ 和 $k'=0$ 时的情况类似。

现在假设这些闭和奇闭轨中没有单边的。则由于 PR^2 上每一双边闭或奇闭轨都包围一拓扑圆盘，而我们前面已设同伦于零的闭或奇闭轨都已被缩成一点当做广义奇点看待了。这样，最后我们应得不到闭和奇闭轨线，与前面所证的相矛盾。事实上，按定理的推理所得出的两条轨线($2m$ 条)应该都是单边的。

以下三个例子可以给读者一些感性知识。

例 2. 图 10.10 中的 PR^2 上的连续流有三个普通奇点：F 为不稳定焦点，S 为鞍点，O 为稳定焦点。故 $n=3$，$k=k'=1$。由引理 6 知有 $T\geqslant 3$，$\sigma=d=0$。记 $3=3+(1)-1$，知可得到一条单边奇闭轨，它是由从 S 跑出的两条甲类分界线(都绕向 O)和 S,O 两个奇点一起构成的，不难看出这是一条单边奇闭轨。

同样，若考虑 T' 和 k'，则可得到由 S,F 以及进入 S 的两条分界线 $\widehat{FS}$ 与 $\widehat{FpS}$ 所构成的另一条单边奇闭轨。在本题中，上述两奇闭轨不一致，故结论实际上比定理 11 的结论要好。

例 3. 图 10.11 中的 PR^2 上的连续流有一不稳定焦点 O，一鞍点 S_1 和一个指标 $+1$ 的高阶奇点 S_2，又有一条单边闭轨 Γ。故 $n=3$，$\sigma=1$。可以设想把 S_2 的两个椭圆域缩到 S_2，使 S_2 成为一广义源点。Γ 是稳定极限环，不同伦于零，又 $k=2$。同前，知若考虑从奇点跑出的分界线则有 $4=(3+2)+(1)-1$。所以除 Γ 以外还有一条由 Γ，S_1 以及从 S_1 跑出的两条甲类分界线

1) 当 $2-\sigma-d<0$ 时这个推理不能用。但此时有 $\sigma+d>2$，定理的结论仍成立。

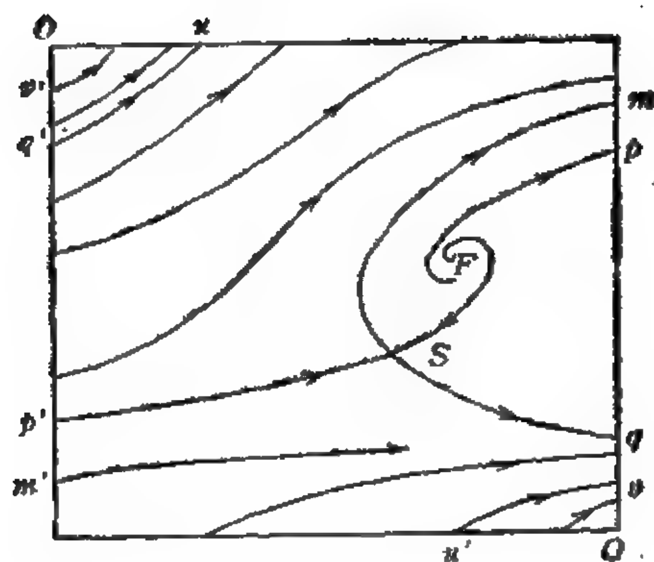


图 10.10

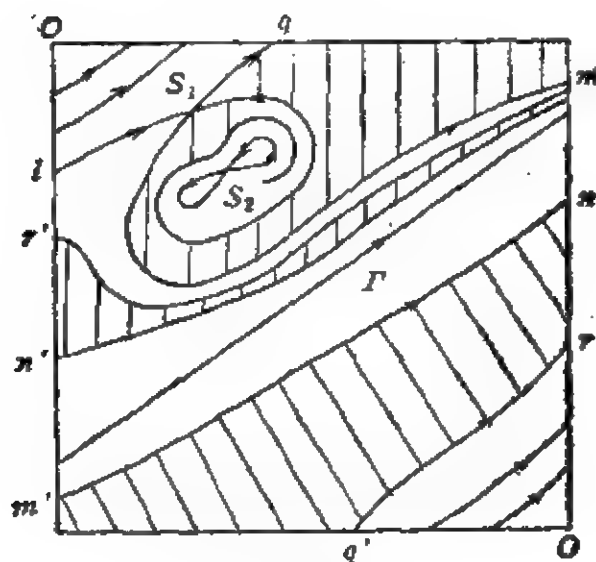


图 10.11

(它们都趋向 Γ)一起构成的广义奇闭轨线 Γ^*. 但这条 Γ^* 却是双边的,它的一边是阴影区域. 由于 Γ 的存在, Γ^* 不在普通的意义下同伦于零.

现在转而考虑进入各奇点的分界线: 有两条进入 S_1 的甲类分界线和一条进入 Γ 的丙类分界线,这里把 Γ 看成广义渊点, $k'=1$.或由(16)的第一式, $T'\geqslant 4-1=3$, 结果也是一样. 但若把

Γ 作为已知的不同伦于零的闭轨看待，则 $n=3$，$\sigma=1$，$n+\sigma=4$。我们由 $3=4+(0)-1$ 推不出有新的奇闭轨线存在。以上所说的可用图 10.11 的简化图(图 10.12)来表示，而定理 11 ii)中的 $m=\max\{k,k'\}=2$。

但事实上，从 S_2 跑出的轨线除了一条进入 S_1 以外，其它的都进入 Γ。故在图 10.12 中补上虚线 $S_2\Gamma$ 以后仍可得到一广义奇闭轨。但它不是由定理 11 的论证所能得到的，因为该定理用了引理 6，其中对 S_2 算作只跑出一条丙类分界线，对 Γ 算作只进入一条丙类分界线。

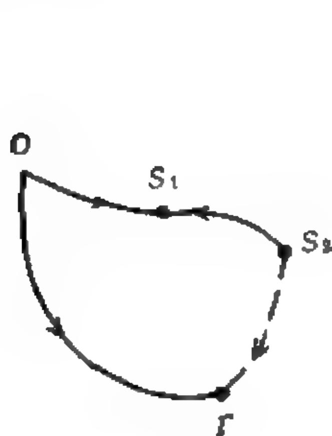


图 10.12

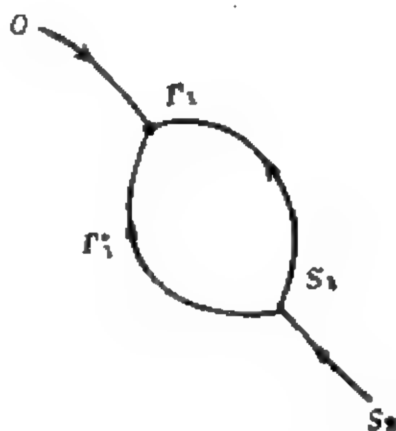


图 10.13

又注意：若在图 10.11 中降低 n,r 的位置，使 n',r' 都位于 l 的上方，则可使从 S_1 跑出的两条分界线都绕向 O，于是 lS_1 将来自 Γ。这样，Γ 将变成不稳定环，而 O 外围将出现稳定环 Γ_1。故得一个新的广义奇闭轨 Γ_1^*，由 Γ_1, S_1 以及从 S_1 跑出的两条甲类分界线所构成。该事实也不能从定理 11 导出，因为 Γ_1 的存在是由 Poincaré-Bendixson 定理导出的。把 Γ_1 看成渊点，考虑四个奇点 O, Γ_1, S_1, S_2 以及从它们跑出的四条分界线。由等式 $4=4+(1)-1$，也得一条新的奇闭线 Γ_1^*，如图 10.13 所示。

例 4(图 10.14)。这里有一个指标 $+2$ 的高阶奇点 O，一个鞍点 S 和一条已知的单边闭轨 Γ。故 $n=2$，$k=k'=0$，$\sigma=1$。从 O 跑出一条乙类分界线，从 S 跑出两条甲类分界线，故 $T=3$。由

$3=(2+1)+(1)-1$，知道除Γ外，还应有一奇闭轨线Γ^*，它由O，S，以及从S跑出的甲类分界线及由O跑出的乙类分界线各一条构成(图中用点线+++++表示)．故由定理 11 只能得到两条奇闭轨，其中之一是Γ。

事实上，Γ现在是单边不稳定极限环，从Γ应可跑出一条丙类分界线．故若在定理 11 中算作$n=3, T=4, \sigma=0$，则由$4=3+(2)-1$可知除Γ^*外还有一条Γ_1^*，它是O点的椭圆轨线之

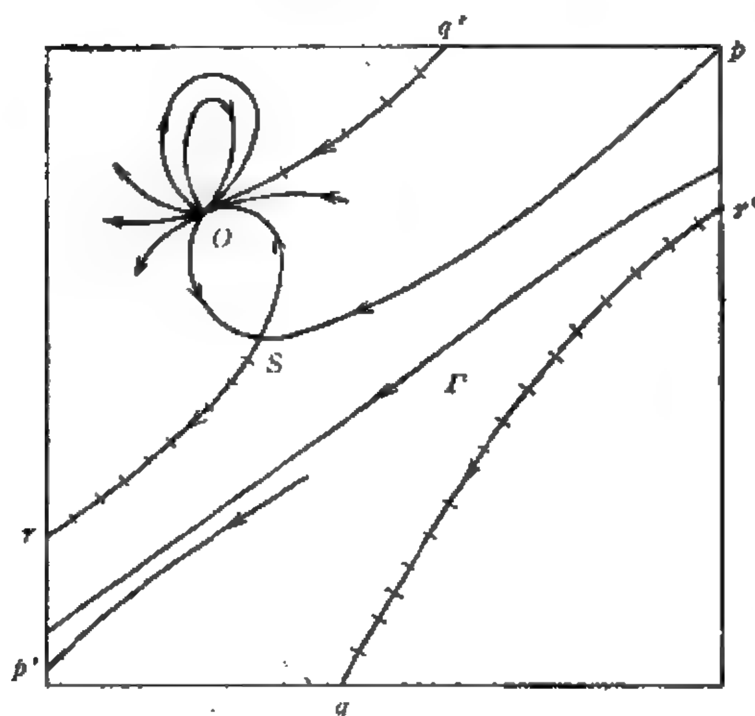


图 10.14

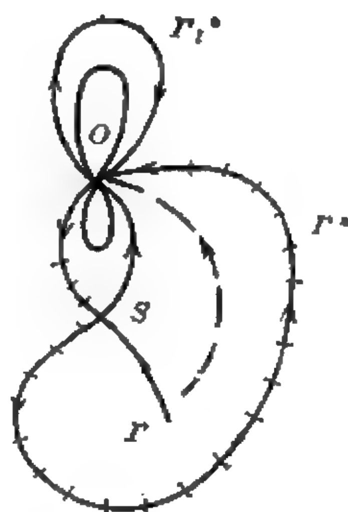


图 10.15

一(图 10.15)。

当然，在出现奇点的椭圆域时，我们可以认为有无限多条奇闭轨．但也和乙、丙类分界线一样，对一个椭圆域我们只算有一条奇闭轨。

下面研究一般不可定向闭曲面M^g上连续流f的性质。

定理 12． 设f有n个奇点，k，k'分别为指数$+1$的源点与渊点的个数，$m=\max\{k, k'\}$，则f的闭与奇闭轨的个数C满足不等式

$$R + C \geqslant g + m - 1, \tag{17}$$

其中 R 是非闭 P 式稳定轨线闭包的个数，$R \leqslant \left[\frac{g-1}{2}\right]$。

证. 由定理 11，我们只须考虑 $g \geqslant 2$ 的情况．证明与定理 11 的证明类似．但应注意：由于现在 $K = 2 - g \leqslant 0$，故 $K > k + k'$ 不可能成立，从而(13)的第二个不等式不可能成立，而第一个不等式现在成为：

$$N(N') \geqslant n - K = n + g - 2, \tag{18}$$
$$M(M') \geqslant 0$$

（见[67]引理3）．(15)，(16)的每一不等式也只有一种情况，即：

$$\begin{aligned} T &\geqslant M + N + k \geqslant n + g + k - 2, \\ T' &\geqslant M' + N' + k' \geqslant n + g + k' - 2. \end{aligned} \tag{19}$$

把(19)的第一个不等式右边改写成

$$T \geqslant (n + R + \sigma + d) + (g + k - R - \sigma - d - 1) - 1,$$

其中 σ 为已知的不同伦于零的闭轨数，d 为不同伦于零的特殊奇闭轨数，即知广义奇闭轨的数目不少于 $g + k - R - \sigma - d - 1$[1]．再加上已知的 $\sigma + d$ 条闭和奇闭轨，即得闭轨与奇闭轨（包括普通的和广义的）的数目 C：

$$C \geqslant g + k - R - 1, \text{ 或 } R + C \geqslant g + k - 1.$$

同样，由 T' 的不等式可导出 $R + C \geqslant g + k' - 1$．合并之，即得(17)．

注意 1：对 K^2 上的无奇点流有 $m = 0$，故 $C + R \geqslant 1$，因已知 $R = 0$，故 $C \geqslant 1$，即必存在闭轨．

注意 2：不等式(17)与(9)的第一个不等式类似，但前者用到 m，后者用到 N_1, N_2，二者之间的关系现在还不清楚．

定理 13. 设不可定向闭曲面 M^g 上存在 s 条单边闭曲线，n 条双边闭曲线 $(s + n > 0)$，使它们互不相交，且 M^g 上除去这

---

1) 如果 $g + k - R - \sigma - d - 1 < 0$，则上述推理不能用．但此式本身表示 $\sigma + d > g + k - R - 1$，从而也有

$$C \geqslant \sigma + d > g + k - R - 1.$$

$s+n$ 条闭曲线后仍为一连通集，其充要条件是

$$s+2n\leqslant\begin{cases}g-1, & \text{当 } g-s \text{ 为奇数时,}\\ g, & \text{当 } g-s \text{ 为偶数时.}\end{cases}\tag{20}$$

证. 用归纳法．当 $g=1$ 时 $M^g=PR^2$．由于 PR^2 上任一双边曲线必把 PR^2 分割成两个连通支，而任二条单边曲线必有交点，因此满足定理的条件的数对 (s, n) 只能是 $(1, 0)$．反过来，$(s,n)=(1,0)$，显然也满足不等式(20)．

当 $g=2$ 时 $M^g=K^2$，易见此时只有三个数对

$$(s,n)=(2,0),(1,0), \text{ 或 } (0,1)$$

满足(20)．反过来，满足定理的条件的上述三种数对也确实存在．对$(1,0)$与$(0,1)$是明显的；对$(2,0)$可以取两条形如 $k^{\pm1}h^m$ 型的单边曲线(见 §4)，对于其它 (s,n) 的组合，$s+n$ 条曲线都会把 K^2 分割成为不连通集．

现在假设定理对 $g=k$ 及 $g=k-1$ 时都已证明其成立，我们要证明它对 $g=k+1$ 也成立．

假设存在 $s+n$ 条互不相交的单边与双边闭曲线，使得从 M^{k+1} 除去它们之后仍得一连通集，要证明不等式当 $g=k+1$ 时成立．

若 $s>0$，设 L 为其中一条单边闭曲线，设 $M_1=M^{k+1}-L$ 的亏格为 k_1，则有

$$2-(k+1)=\chi(M^{k+1})=\chi(M_1)$$

$$=\begin{cases}2-2k_1-1, & \text{当 } M_1 \text{ 可定向时;}\\ 2-k_1-1, & \text{当 } M_1 \text{ 不可定向时,}\end{cases}$$

从而

$$k_1=\begin{cases}k/2, & \text{当 } M_1 \text{ 为可定向时;}\\ k, & \text{当 } M_1 \text{ 不可定向时.}\end{cases}$$

这样，当 M_1 为可定向时，k 必为偶数，故由[4]定理 9.3.6 知 $n\leqslant\frac{k}{2}$，$s=1$，从而 $s+2n\leqslant k+1$．当 M_1 为不可定向时有 $s=s_1+1$，由归纳法的假定，有

$$s + 2n = 1 + s_1 + 2n$$

$$\leqslant \begin{cases} k_1 = k, \text{当 } k - s \text{ 为偶数时;} \\ k_1 + 1 = k + 1, \text{当 } k - s \text{ 为奇数时.} \end{cases}$$

这就证明了(20)式对 $g = k + 1$ 成立.

若 $s = 0$, L 为一条双边闭曲线. 此时注意 $M_1 = M^{k+1} - L$ 的亏格 k_1 满足等式:

$$k_1 = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2}, \text{当 } M_1 \text{ 为可定向时,} \\ k - 1, \text{当 } M_1 \text{ 为不可定向时.} \end{cases}$$

如前可证 $(0, n)$ 也满足 $g = k + 1$ 时的(20)式.

另一方面,如果已给一对满足(20)式的非负整数(s, n),我们来证明一定存在 $s + n$ 条互不相交的单边与双边闭曲线,使它们在 M^g 上的余集仍为连通的. 为此,不妨把M看成是一个球上粘有 g 个交叉帽(见[4]第九章定理 3.10), 即若 M^* 是一具有 g 个边界圆 $l_1, l_2, \cdots, l_g$ 的球面,H 是一映射, 把一切 l_i 的对径点等同起来. 记 $L_i = H(l_i)$, 则 $M^g = H(M^*)$(见 §1 (4)式及图 10.16). 显然,我们可以取 $L_1, \cdots, L_s$ 为 s 条单边曲线. 若 $s < g$,而 $n > 0$,则可以取 n 对单边闭曲线$(L_{s+1}, L_{s+2}), \cdots, (L_{s+2n-1}, L_{s+2n})$. 对

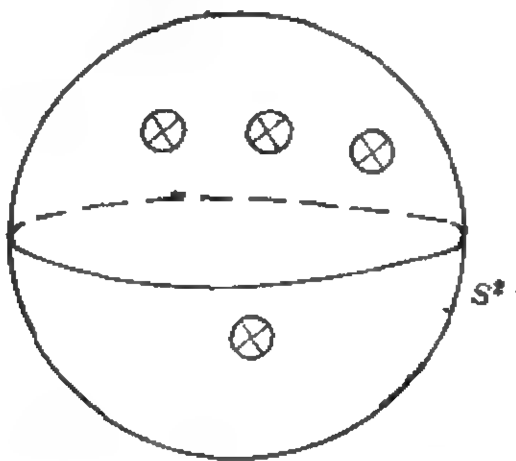


图 10.16

每一这样的单边曲线对 (L_{s+i}, L_{s+i+1}), 我们先从每一曲线切去一小段弧,然后用位于球面上的另外两段曲线弧来连接它们,使之成

为一单闭曲线 C_i，则 C_i 必为双边曲线，且其余集在球面上是连通的。这样就得到 n 条所需的双边曲线。定理证毕(图 10.17)。

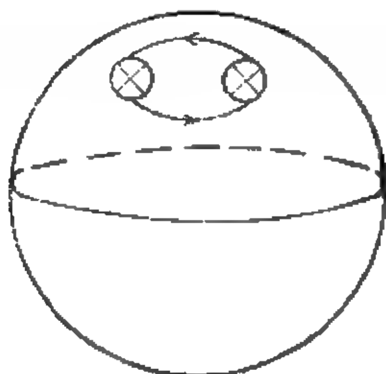


图 10.17

定理 14. 设 M^g 为亏格 g 的不可定向曲面，f 为 M 上的连续流，有 $s+n$ 条不同伦于零，彼此不相遇，亦不相互同伦的单边和双边闭或奇闭轨，则：

1) $s\leqslant g$，且存在这样的 f 使 $s=g$；

2) 如果 g 为奇数，且奇点个数有限，则 $s\geqslant 1$；

3) 如果奇点个数有限，则 $g-s$ 为偶数；又如果 $g>1$，M 为闭曲面，则有

$$n+R\leqslant \max\left\{1,\frac{3g+s-6}{2}\right\},\ 2R+s\leqslant g,$$

由此易推出

$$n+2R\leqslant \frac{3g+s-6}{2}+\frac{g-s}{2}=2g-3$$

及

$$s+n+4R\leqslant 3g-3.$$

证明从略，请参阅原文[37]。

最后证明[37]中的一个有趣结果。

设 M 是有亏格 g 的不可定向曲面，L 是 M 上一条 Jordan 曲线，L^* 是 L 在 M 的二重覆盖空间 M^* 中的提升。那么有：

定理 15. 若 g 为偶数(奇数)而 L 为单边的(双边的,且 $M-L$ 为连通集),则 M^*-L^* 为连通集.

证. 我们把 M 看成是一个带有 g 个交叉帽的球面,设 M_1 与 L_1 是 M 与 L 的复本. 则 M^* 可以看成是 M 与 M_1 通过粘合它们的 g 对交叉帽而得的连通和, 而 L^* 可视为 L 与 L_1 的连通和。

今先证定理的第一部分, 即 g 为偶数的情况, 因为 $\chi(M-L)=\chi(M)=2-g$,且

$$\chi(M-L)=\begin{cases}2-g_{M-L}-1, & \text{当 } M-L \text{ 为不可定向时;}\\ 2-2g_{M-L}-1, & \text{当 } M-L \text{ 为可定向时.}\end{cases}$$

易见 $M-L$ 与 M_1-L_1 是连通不可定向曲面,具有 $g-1$ 个交叉帽,和一条边界 L (或 L_1).

由 M^*-L^* 的可定向性以及 $M^*-L^*=(M-L)\cup(M_1-L_1)$ 可知 M^*-L^* 可看成是 $M-L$ 与 M_1-L_1 通过粘合它们的 $g-1$ 对交叉帽, 并且把 L 与 L_1 连接成为 L^* 而得到. 因此 M^*-L^* 是连通集.

定理的第二部分(即 g 为奇数的情况)可类似地证明, 只须注意由公式

$$2-g=\begin{cases}2-g_1-2, & \text{若 } M-L \text{ 为不可定向时,}\\ 2-2g_1-2, & \text{若 } M-L \text{ 为可定向时,}\end{cases}$$

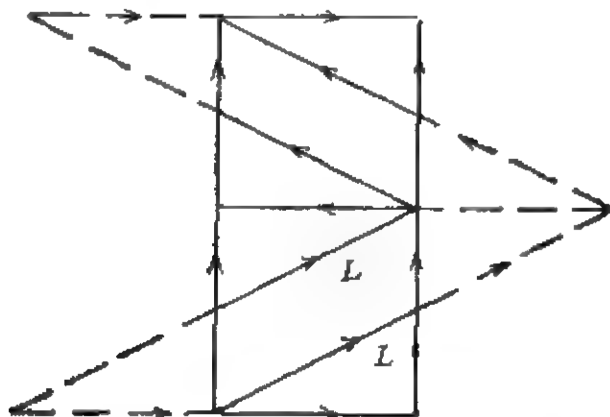


图 10.18

以及 g 为奇数,可知 $M-L$ 应仍为不可定向.

下面是当 $g=2$，$M=K^2$，$M^*=T^2$，$L=kh^1$ 时的图示，M^*-L^* 表示将 T^2 沿纬圈割开(图 10.18)。

结论。本节所介绍的这些结果可以说是曲面拓扑学和曲面动力系统方面的一些具有基本重要性的结果。但是如何应用它们来解决曲面上由微分方程所定义的动力系统的闭轨与奇闭轨的存在性与个数问题，仍有待人们去作进一步的探讨。

§11 环面上的线性三角多项式系统

在前面十节中我们所研究的曲面上的动力系统都是抽象地定义的，除了极个别的例题之外．对于这种动力系统，我们总是先假设它具有某些性质，然后再试图证明它也具有另外一些性质．这时，该假定哪些性质就是一个很值得考虑的问题了．譬如在[68]中曾经证明过如下的定理：

定理1. 设 f 为亏格 $\geqslant 1$ 的闭曲面上的 C^1 向量场，假设：

1） f 有有限多个的非退化奇点，

2）在这些奇点中至少有一个自由源点，

3）不存在渊点，

4）不存在完全由鞍点和连接它们的轨线所构成的奇闭轨线．

那么在此曲面上必存在非奇点的回归解．

如 §9 所见，余澍祥[69]改进了定理 1，所假设的条件更少，而得到的结果更强．因此如果在[68]中假设条件 1)，2)，4) 以及定理 1 的结论成立，而问条件 3) 是否成立，则回答可以是肯定的，也可以是否定的，即没有确定的答案．

因此，在对曲面动力系统作了足够的一般定性研究以后，我们现在要转而对曲面上由微分方程所定义的动力系统做些研究．这种动力系统只要方程一经给定以后就一切都决定了．由 §1 可知对两种亏格为 1 的闭曲面，环面和射影平面以及亏格为 2 的不可定向闭曲面 Klein 瓶，要用方程来定义动力系统是很容易的，即先在平面上的正方形中给定动力系统，并要求它在边界上满足连接和光滑性条件，就可得到上述三种曲面上的 $C^1, C^2, \cdots$ 以至解析系统了．类比于多项式系统中的最简单但却是最重要的——线性常系数方程，并且考虑到边界条件，我们自然地会想到来研究线性三角多项式系统（见[78]）：

$$\frac{dx}{dt}=A\sin x+B\sin y,\frac{dy}{dt}=C\sin x+D\sin y, \qquad (1)$$

这里在方程右边不取常数项和余弦函数，为的是使(1)的一次近似方程具有

$$\frac{dx}{dt}=ax+by, \qquad \frac{dy}{dt}=cx+dy \qquad (2)$$

的形式[1]。其次，为了使(1)能定义环面上的动力系统，需要取一个基本正方形，使(1)在正方形对边上的等同点处定义相同的向量，这样才能得到至少是 C^1 向量场。为此，我们取基本正方形为

$$S_1:\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant y\leqslant 2\pi,$$

或

$$S_2:\ 0\leqslant x\leqslant \pi,\ 0\leqslant y\leqslant \pi.$$

不难看出由方程(1)和正方形 S_1 就可确定环面上的解析向量场，由(1)和正方形 S_2 则可确定环面上的 C^1 向量场。下面依次对这两个向量场及其轨线的拓扑结构作较详细的分析。读者将会看到，情况要比平面上的线性系统(2)复杂得多。

(一) 在 S_1 所确定的环面上研究方程(1).

(1) 在 S_1 上有九个奇点，叠合为环面 T^2 后得到 T^2 上有四个奇点的三角多项式系统。S_1 上的奇点可分为两类。第一类有五个：

$$(0,0),\ (0,2\pi),\ (2\pi,0),\ (2\pi,2\pi)\ 和\ (\pi,\pi),$$

对应到 T^2 上则前四个合而为一。第二类奇点有四个：

$$(0,\pi),(2\pi,\pi),(\pi,0),(\pi,2\pi).$$

对应到 T^2 上，则前两个合而为一，后两个合而为一。由初等计算易知当 $AD-BC>0$ 时前一类奇点的指标为 $+1$，后一类奇点的指标为 -1。$AD-BC<0$ 时则反之，这时只要平移坐标原点到任一第二类奇点去，即可化为 $AD-BC>0$ 的情况，当然，

1) [77] 曾对右边含常数项的线性三角多项式系统做过一些研究，但仍假设不存在奇点。

我们假定方程(1)在 S_1 以外也有定义。因此以后可设 $AD-BC>0$[1],于是第一类奇点有指标+1,第二类为鞍点。

经过详细的分析(这部分较为繁琐,故从略),按系数 A,B,C,D 所满足的一些代数关系式,可知(1)在 S_1 上的奇点组合有如下三种:

1) 中心-鞍点型。这又可以分为两种类型。

(1) $A=-D$, $B=-C$, $|B|>|A|$[1]。这时(1)有通积分

$$\left(\cos\frac{x+y}{2}\right)^{D+C}=K\left(\cos\frac{x-y}{2}\right)^{D-C},\tag{3}$$

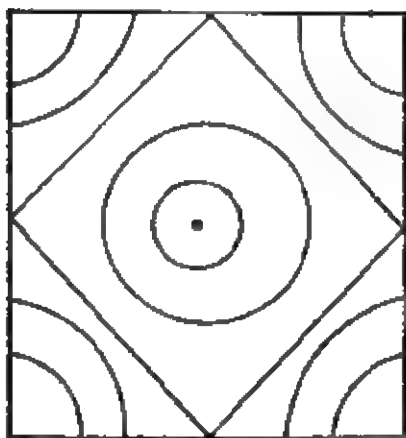


图 11.1

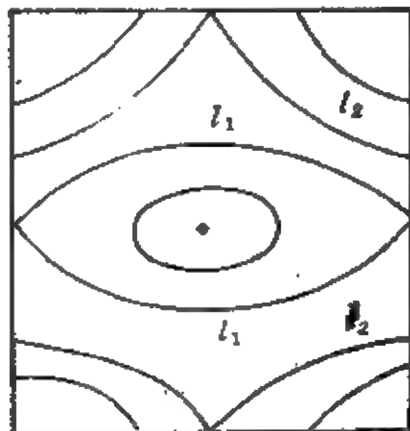


图 11.2

轨线图如图 11.1,其中两个鞍点在同一条奇闭轨线上。

(2) $A=D=0$, $B\neq -C$。这时有通积分

$$\cos y=\frac{C}{B}\cos x+K,\tag{4}$$

轨线图如图 11.2,其中两个鞍点在不同的奇闭轨线上。

不难想象,当 S_1 的对边等同而成为 T^2 以后,图 11.1 四角的

1) 当 $AD-BC=0$ 时(1)有一系平行直线解,情况较简单,相当于 Poincaré 讨论过的 $\frac{d\varphi}{d\theta}=\alpha$,故从略。当 $A=-D$, $B=-C$ 而 $|B|=|A|$ 时即出现上述情况。

小三角形也拼成一中心区域，故环面由两个中心区域组成，其公共边界是同时经过两鞍点的奇闭轨线。在图 11.2 的情况，则中心区域的边界为各自经过一个鞍点的奇闭轨线 l_1 和 l_2，在 l_1 与 l_2 之间还充满着一系不同伦于零的闭轨线。

2）结点-鞍点型。

（1）$A = -D$，$B = -C$，$|B| < |A|$。

通积分仍如(3)式，但拓扑图则如图 11.3[1]。

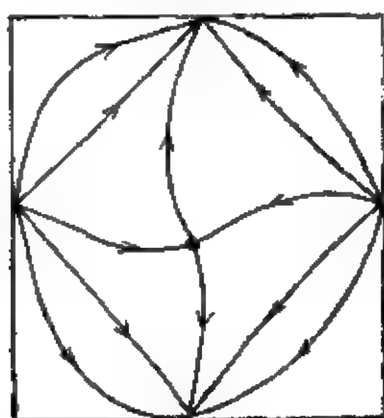


图 11.3

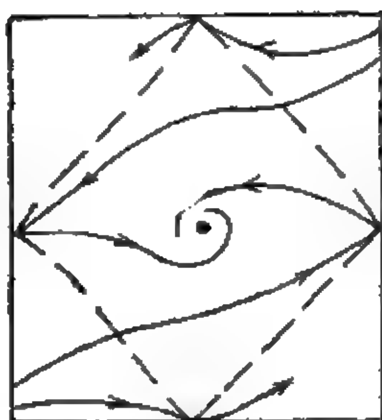


图 11.4

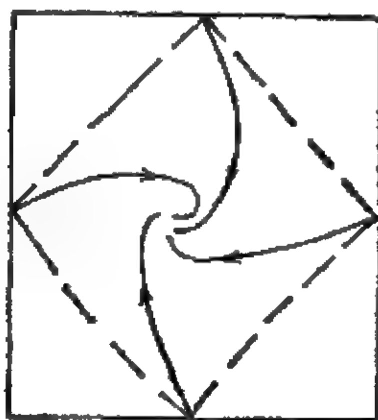


图 11.5

（2）$B = C = 0$，$A \neq -D$。通积分为

1）这里设 $AD - BC < 0$，从而 (π, π) 是鞍点，由此可以更清楚地看出过鞍点的四条分界线的去向。

$$\left(\tan\frac{y}{2}\right)^A = K\left(\tan\frac{x}{2}\right)^D,$$

其轨线图如图 11.6，正方形的四条边都是轨线[1]。

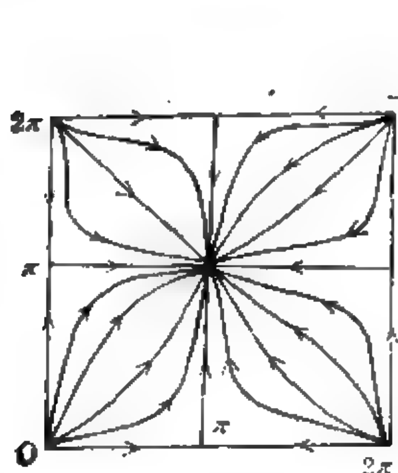


图 11.6

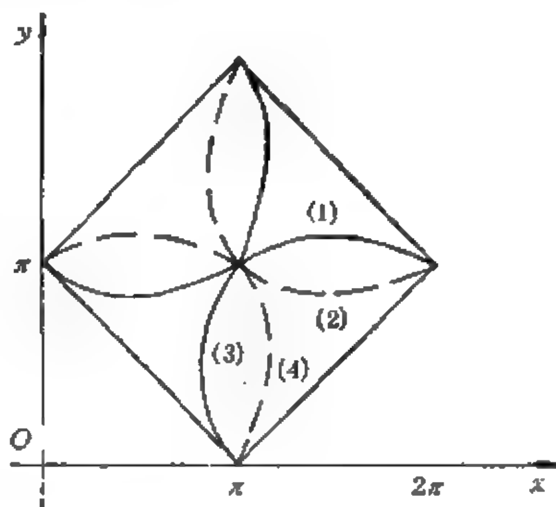


图 11.7

但反过来，具结点-鞍点型拓扑结构图的方程(1)不一定是可积分的。此外，在这里我们也没有考虑在结点外围是否可能存在极限环。

3) 焦点-鞍点型。

基本结构有图 11.4 和图 11.5 两种。在图 11.4 内只有两条过鞍点的分界线全部位于虚线所围的正方形中；而图 11.5 的四条分界线则都位于此正方形中。同前，这里也没有考虑焦点外围是否存在极限环的问题。

下面转而考虑非中心-鞍点型的方程在什么时候存在第一类或第二类闭轨的问题。

情况 I. $A + D = -(B + C) \neq 0$.

仿照[77]，置

$$\bar{A} = \frac{A-D}{2}, \quad \bar{B} = \frac{B-C}{2}, \quad \delta = \frac{A+D}{2}, \tag{5}$$

1) 注意，在 T^2 上图 11.6 是和图 11.3 拓扑等价的。

则

$$A=\bar{A}+\delta, B=\bar{B}-\delta, C=-\bar{B}-\delta, D=-\bar{A}+\delta, \quad (6)$$

而方程(1)成为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(\bar{A}+\delta)\sin x+(\bar{B}-\delta)\sin y,\\ \dfrac{dy}{dt}=(-\bar{B}-\delta)\sin x+(-\bar{A}+\delta)\sin y.\end{cases} \quad (7)$$

固定 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 而让 δ 变动，容易算出

$$\begin{vmatrix}P & Q\\ \dfrac{\partial P}{\partial \delta} & \dfrac{\partial Q}{\partial \delta}\end{vmatrix}=(\bar{B}-\bar{A})(\sin x-\sin y)^2, \quad (7')$$

它在 S_1 中为常号，仅在 $x=y$ 及 $x+y=\pi$，$x+y=3\pi$ 上恒等于零。故(7)对 δ 构成广义旋转向量场。由前知当 $\delta=0$ 时(7)有中心，所以当 $\delta\neq 0$ 时(7)没有第一类闭轨。

在讨论其它情况以前首先研究一下(1)的等倾线的形状。它们都是 $M\sin x+N\sin y=0$ 形状的曲线。我们不妨限制在四直线：

$$y=x\pm\pi,\quad x+y=\pi,\quad x+y=3\pi$$

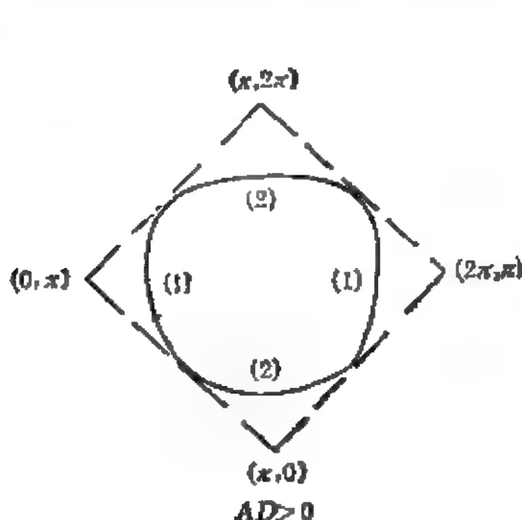
所围的正方形中来考虑(图 11.7)；因为不难证明此正方形的边都是方程(1)的无切弧，闭轨线不能和它们相交。又当 $AD-BC>0$ 时，(π,π) 与(0,0)一样是指标+1的奇点，故第一类闭轨若存在，必定保持在此正方形中。又不难看出：当 M 与 N 异号时 $M\sin x+N\sin y=0$ 是形如(1)或(3)的曲线；当 M 与 N 同号时它是形如(2)或(4)的曲线。当 $|M|=|N|$ 时它退化为 $x=y$，$x+y=\pi$ 和 $x+y=3\pi$；或退化为 $x+y=2\pi$，$x=y+\pi$ 和 $y=x+\pi$(图 11.7)。

其次考虑(1)的发散量为零的轨迹，即

$$A\cos x+D\cos y=0. \quad (8)$$

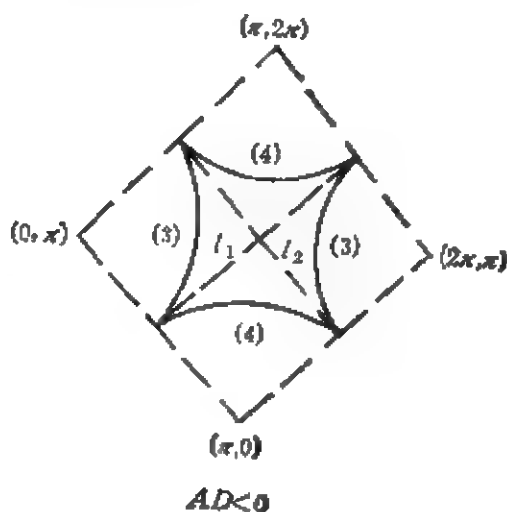
该曲线的可能形状见图 11.8 和 11.9，前者出现在 $AD>0$ 时，后者出现在 $AD<0$ 时，两图中的(1)，(3)表示 $|D|<|A|$ 时的

曲线(8);(2),(4)表示 $|D|>|A|$ 时的曲线(8)。当 $D=A$ 时(8)退化为图 11.8 中正方形的四边;当 $D=-A$ 时(8)退化为图 11.9 中的 l_1, l_2。这样,$D=A\neq 0$ 的情况就可以不用考虑,因为第一类闭轨不可能保持在发散量为常号的区域内部。又 $D=A=0$ 的情况前面已经考虑过,因此以后不妨设 $D\neq A$。



$AD>0$

图 11.8



$AD<0$

图 11.9

对(1)不妨固定 $A\geqslant 0$[1],这时有 $B\geqslant 0$ 和 $B<0$ 两种可能。当 $B<0$ 时可作变换 $x=u$, $y=2\pi-v$, 使 B, C 改号,故当 B 变为正的时 $AD-BC$ 不变号。因此以后总可假定在方程(1)中有 $A\geqslant 0$, $B\geqslant 0$。

情况 II. $CD<0$。

由于 $AD-BC>0$,故必有 $C<0$, $D>0$。取一 Liapunov 函数

$$V=-C\sin^2\frac{x}{2}+B\sin^2\frac{y}{2},$$

则 $V=V_0$, $\max(B,-C)\leqslant V_0\leqslant B-C$ 定义一系包围奇点 (π,π) 的闭曲线,且

1) 若 $A<0$,可作变换 $t=-t'$, $\pi-x'=x$, $y'=y$,则 A,D 改号,而 $AD-BC$ 不变号。

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} = -\frac{AC}{2}\sin^2 x + \frac{BD}{2}\sin^2 y \geqslant 0,$$

故(1)没有第一类闭轨。

情况 III. $C \geqslant 0$, $D > 0$. 这时可取

$$V = C\sin^2\frac{x}{2} + B\sin^2\frac{y}{2},$$

如前可证不存在第一类闭轨。

情况 IV. $C < 0$, $D < 0$.

再分三种情况来考虑:

a) $A \geqslant B > 0$, $A \geqslant |D|$.

假设(1)存在一闭轨 Γ. 由于 $AD - BC > 0$, 故 $|C| > |D|$,从而水平与铅直等倾线都是图 11.7 中的形状象(4)的曲线，而发散量等于零的曲线是形状象图 11.9 中的(3)的曲线。图 11.10

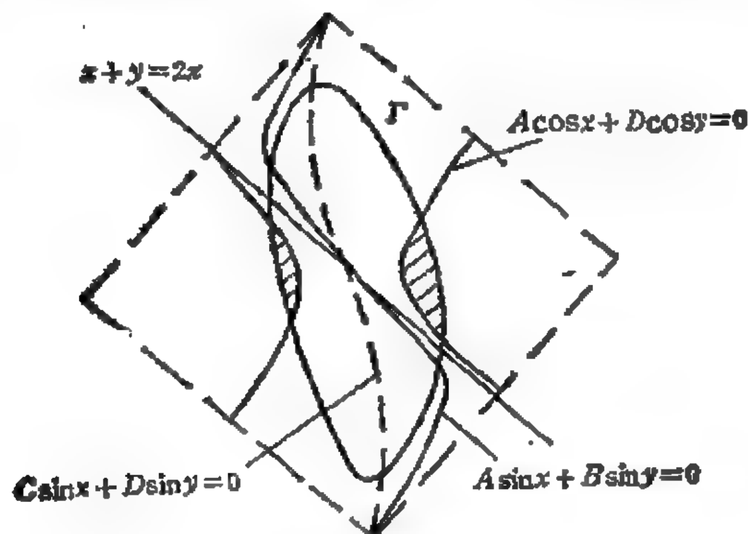


图 11.10

中画出这三条曲线并且假设其存在闭轨 Γ. 阴影区域表示 Γ 内部发散量为正的部分。易见此两区域关于直线 $x + y = 2\pi$ 的对称部分也必位于 Γ 内部，并且有

$$(A\cos x + D\cos y)_P < -(A\cos x + D\cos y)_{P'},$$

这里 P 指阴影区域中任意一点，P' 表示它关于 $x + y = 2\pi$ 的对称点。因此我们有不等式

$$\iint_{\operatorname{int}\Gamma}(A\cos x+D\cos y)dxdy<0,$$

这是个矛盾。故 Γ 不存在。

b) $A\geqslant B>0$, $|D|>A$.

已知(1)的特征方程在 (π,π) 点为

$$\lambda^2+(A+D)\lambda+AD-BC=0.$$

故当 $A+D>0$ 时 (π,π) 为稳定结点或稳定粗焦点；当 $A+D=0$ 时 (π,π) 是稳定细焦点，且由 a) 知 (π,π) 外围无环。这样，当 D 小而使 $A+D<0$，但 $0<-A-D\ll 1$ 时，(π,π) 将因改变稳定性而在其外围产生一稳定极限环。这样出现的极限环在大范围来说是否唯一，不得而知。所有已知的判别极限环唯一性的定理对于方程(1)都是不适用的。

c) $0<A<B$.

现在我们可以对(1)作变量代换：

$$x'=2\pi-y,\ y'=2\pi-x,\ t=-t'.$$

设所得新的方程右边的系数为 A',B,C',D'，则有：

$$A'=-D, B'=-C, C'=-B, D'=-A, \text{且 } C'<D'<0.$$

故若 $|C|\leqslant|D|$，则 $A'\geqslant B'>0$，我们对新的方程又得到情况 a) 或 b)。如果 $|C|>|D|$，则上述变换没有用。但我们可以对此情况直接讨论，象在 a) 中所做的那样。可证 当 $A\geqslant|D|$ 时不存在第一类闭轨，而当 $A<|D|$，$|A+D|\ll 1$ 时存在极限环。

至于第二类闭轨，在图 11.2 中我们已经看到当 $A=D=0$ 时是可能存在的，它是从左到右还是从上到下，要看 $|B|$ 和 $|C|$ 的大小而定。即当 $B>-C>0$ 时是从上到下的，当 $0<B<-C$ 时是从左到右的，当 $B=-C>0$ 时得到图 11.1 中的奇闭轨[1]。

如果 $|A|+|D|\neq 0$，我们不难就水平与铅直等倾线的各种

---

1) 关于这一点，[78]作了错误的结论。

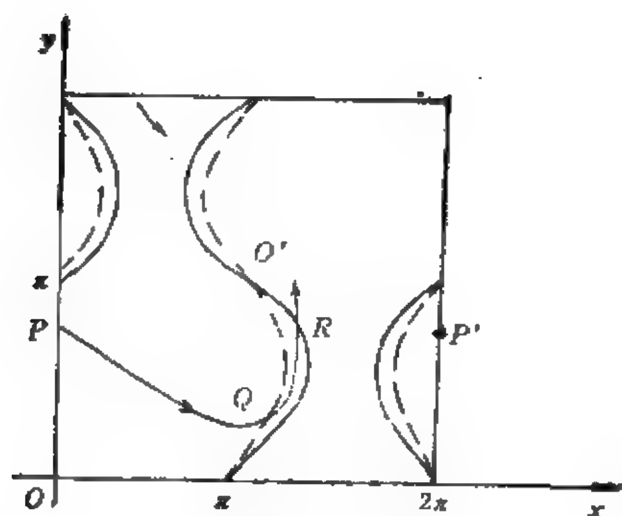


图 11.11

可能分布来否定或肯定第二类闭轨的存在。下面举三个具体例子来加以说明。

例 1. $\dot{x} = 3\sin x + 2\sin y, \dot{y} = -2\sin x - \sin y$。

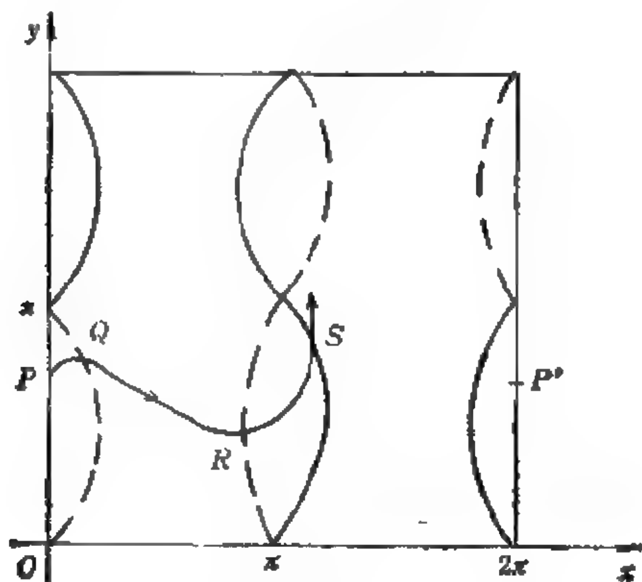


图 11.12

图 11.11 中实曲线是 $3\sin x + 2\sin y = 0$ 的轨迹，虚曲线是 $2\sin x + \sin y = 0$ 的轨迹。从 y 轴上 P 点出发的轨线将向右下方前进，不妨假设它不和 x 轴上的 $(0, \pi)$ 段相遇。于是它将遇 $2\sin x + \sin y = 0$ 于 Q 点，然后向右上方前进。它不可能立刻和

$3\sin x+2\sin y=0$ 相遇，也不可能再与 $2\sin x+\sin y=0$ 相遇，故只能在月形区域中上升，最后在 $3\sin x+2\sin y=0$ 有负斜率的点 R 穿出此区域，然后回头向左上方前进，故不可能到达 P 的对称点 P'。

对于从 $y=2\pi$ 上出发的轨线也可以做同样的讨论。故知此方程没有第二类闭轨线。

例 2. $\dot{x}=3\sin x+2\sin y$，$\dot{y}=-2\sin x+\sin y$，情况与例 1 类似(图 11.12)，。

例 3. $\dot{x}=\frac{1}{2}\sin x+2\sin y$，$\dot{y}=-3\sin x-\frac{1}{4}\sin y$。

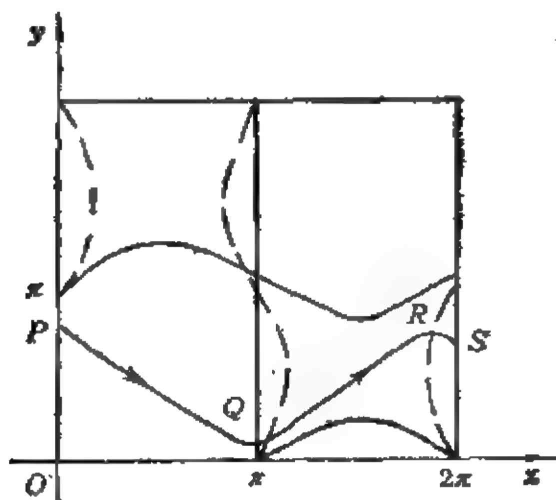


图 11.13

如图 11.13，假设从 y 轴上 P 点出发的轨线交直线 $x=\pi$ 于 Q，再交 $3\sin x+\frac{1}{4}\sin y=0$ 于 R，最后交直线 $x=2\pi$ 于 S。我们无法判定 P 与 S 的高低，因而也无法确定方程是否存在第二类闭轨。现在我们让 D 从 $-\frac{1}{4}$ 增加，则易看出经过 Q 点的轨线在 Q 左方向下转，而在 Q 右方向上转。最后当 $D\to 0$ 时，水平等倾线成为 $x=\pi$ 及 $x=2\pi$，R 与 S 重合。这时 S 的纵坐标必定大于

P 的纵坐标。因若不然，则可令 A 从 $\frac{1}{2}$ 减少而趋于零（这时 $\widehat{QP}$ 应向上转，而 $\widehat{QR}$ 应向下转）最后得到图 11.2 中的一条对称于 $x=\frac{\pi}{2}$ 的第二类闭轨，与假设 $y_S < y_P$ 相矛盾。所以必须

$$y_S > y_P, \text{ 当 } A=\frac{1}{2},\ D=0 \text{ 时}. \tag{9}$$

现在反过来，先让 A 从 $\frac{1}{2}$ 减小到零（这时 $\widehat{QP}$ 向上转，$\widehat{QR}$ 向下转），再让 D 从 $-\frac{1}{4}$ 增加到零（这时 $\widehat{QP}$ 向下转，$\widehat{QR}$ 向上转），结果也得到一条对称于 $x=\frac{\pi}{2}$ 的第二类闭轨，由此可知，应有

$$y_P > y_S \text{ 当 } A=0,\quad D=-\frac{1}{4} \text{ 时}. \tag{10}$$

结合(9)与(10)式可知：必定存在 A_0, D_0, $0<A_0<\frac{1}{2}, 0>D_0>-\frac{1}{4}$，使得对应的 $y_P=y_S$，即

$$\dot{x}=A_0\sin x+2\sin y,\quad \dot{y}=-3\sin x+D_0\sin y \tag{11}$$

有第二类闭轨。

回忆平面定性理论中由一系闭轨经过扰动能产生极限环的理论，现在我们可以提出如下问题：

已知方程

$$\frac{dx}{dt}=B\sin y,\quad \frac{dy}{dt}=C\sin x,\quad B\neq -C$$

有一系第二类闭轨。问当 $|A|\ll 1$, $|D|\ll 1$ 时

$$\frac{dx}{dt}=A\sin x+B\sin y, \frac{dy}{dt}=C\sin x+D\sin y$$

有几个第二类极限环？

（二）在 S_2 所确定的环面上研究方程(1)

此时位于正方形四角的奇点 $O(0,0)$，$O'(\pi,0)$，$O''(0,\pi)$ $O^*(\pi,\pi)$ 在环面上合并为一奇点，它有指标 0．此奇点邻域中的轨线分布可由 S_2 的四个角域中轨线的分布并而得出[1]．不难看出这样得到的只是环面上的 C^1 系统．例如取等同的两点 $(0,y)$ 和 (π,y)，由于

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A\cos x(A\sin x + B\sin y)$$

$$+ B\cos y(C\sin x + D\sin y),$$

易见其值在 $(0,y)$ 和 (π,y) 是不同的，故(1)不是 C^2 系统。

注意在变换

$$x' = \pi - x,\ y' = \pi - y$$

之下，(1)中的 A,B,C,D 同时变号，可知(1)在 S_2 中所定义的向量场对称于 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$[2]，这一性质以后常要用到．除此以外，我们还可以利用下列变换来简化对 S_2 所定义的环面向量场的讨论：

1) $x' = y$，$y' = x$，表示关于直线 $x = y$ 作对称，它起了交换 A 与 D，B 与 C 的作用，不影响 $AD - BC$ 的值。

2) $x' = x$，$y' = \pi - y$（或 $x' = \pi - x$，$y' = y$），表示关于直线 $y = \frac{\pi}{2}$（或直线 $x = \frac{\pi}{2}$）作对称，它起了改变 C 与 D 的符号（改变 A 与 B 的符号）的作用。

3) $x' = \pi - y$，$y' = \pi - x$，表示关于直线 $x + y = \pi$ 作对称，由此得到的新方程的系数为：

$$A' = -D,\ D' = -A,\ B' = -C,\ C' = -B,$$

1）注意：在 S_1 外部拓广方程(1)时，对 x,y 都应有周期 π。

2）仿此，易见(1)在 S_1 中所定义的向量场对称于 (π,π)．因此，方程(11)的一条第二类闭轨，如果不通过 (π,π)，则必有第二条第二类闭轨且其和第一条关于 (π,π) 是对称的。

从而 $AD - BC = A'D' - B'C'$。

不难证明：利用这些变换，我们只须讨论下列两种情况好了：

I. $AD - BC > 0$, $B > 0$, $C < 0$.

II. $AD - BC > 0$, $A > 0$, $D < 0$.

注意：现在 $AD - BC > 0$ 只说明在 S_2 的四个角域中，O 和 O^* 的角域中没有整个的鞍状区，而在 O' 和 O'' 的角域中则各包含一个鞍状区、因而所得的环面上的指标为零的奇点在小邻域内有两个鞍状区，而无椭圆区。

在分析(1)的全部轨线图时至关重要的是：看从 S_2 的各个角点有无(沿例外方向)跑进 S_2 的轨线，如果有的话，是一条，两条还是无数条。

以 $k_1 \geq k_2$ ($k'_1 \geq k'_2$) 表示 O 及 O^* (O' 及 O'') 点的例外方向，则 $k_i(k'_i)$ 满足二次方程

$$\begin{gathered} Bk_i^2 + (A - D)k_i - C = 0, \\ (Bk_i'^2 - (A + D)k'_i + C = 0). \end{gathered} \tag{12}$$

关于水平或铅直等倾线的分析与 S_1 的情况一样。但当 $AB > 0$ ($CD > 0$) 时铅直等倾线(水平等倾线)在 S_2 中没有轨迹，从而 $\frac{dx}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$ 在 S_2 中保持定号，这一点以后将常用到。

I. $B > 0$, $C < 0$。又可分为六种不同的情况：

(i) $A = D = 0$。此时(1)有通积分

$$B\cos y - C\cos x = K. \tag{13}$$

当 $B = -C$ 时 $x + y = \pi$ 是轨线，我们有图 11.14[1]。这时环面上充满了一系闭轨[2]。

当 $B \neq -C$，但 B 与 C 可通约时，则不难证明环面上仍有一系闭轨。图 11.15 所画的是 $B = 3$, $C = -2$ 时过 O'' 的闭轨。它被 S_2 的边分成四段、沿着这条轨线从 O'' 走到 O'。我们看到

---

1) 即图 11.1 的左下角，S_2 占 S_1 的 1/4.

2) 由于现在环面上有唯一的奇点，指标为零，故凡是存在的闭轨，必定是第二类的。

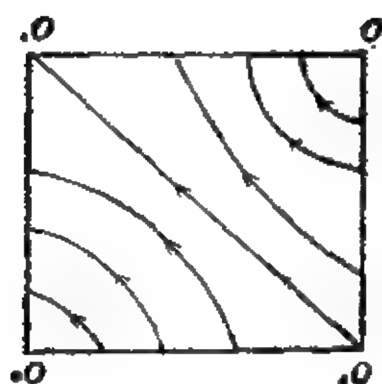


图 11.14

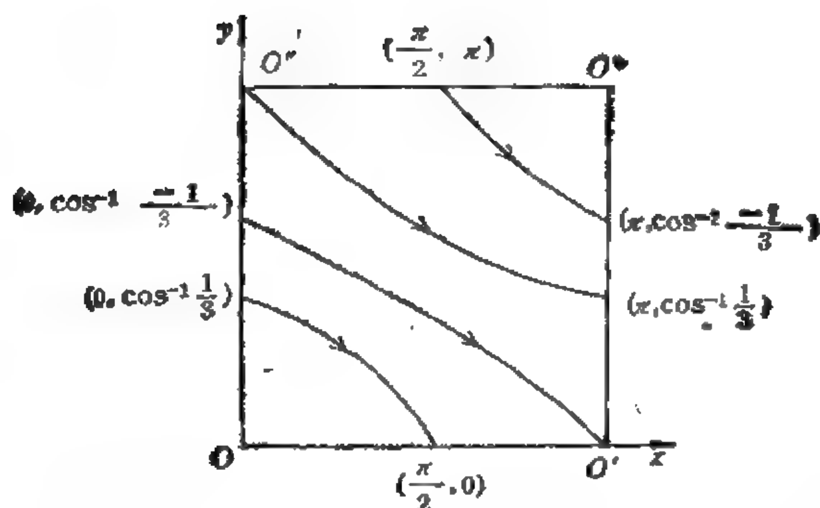


图 11.15

在 x 方向的行程是 3π，在 y 方向的行程是 2π。故旋转数为$\frac{2}{3}$，即轨线的 y 方向行程被除于它的 x 方向行程。

至于环面上过其它点的轨线也都是有旋转数为$\frac{2}{3}$的闭轨，这可由古典的无奇点的环面流的熟知性质导出。因为由(12)的第二式知道现在从 O'' 有唯一的轨线进入 S_2，又有唯一的轨线从 S^2 进入 O'，所以 $O=O'=O''=O^*$ 现在其实是一个可去奇点。

当 B 与 C 为不可通约时由(13)及数论中熟知的定理知道任一轨线在环面上处处稠密，即整个环面是一 P 式稳定轨线的闭包，每

一轨线的旋转数是 $\rho = |C|/B$，ρ 是无理数[1]。

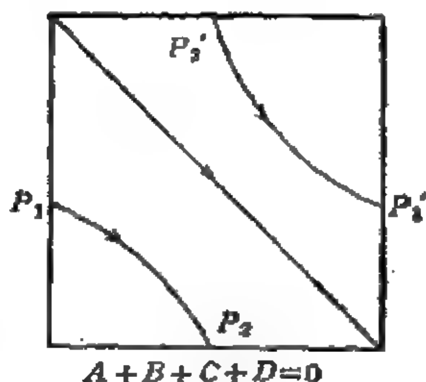
以下研究 $|A| + |D| \neq 0$ 的情况，不失一般性可设 $A \neq 0$。

(ii) $A > 0,\ D \leqslant 0$。

由(12)式看出从 O'' 有唯一的负斜率轨线进入 S_2，从 O 没有轨线进入 S_2。计算直线 $x + y = \pi$ 上轨线的穿过方向

$$\left.\frac{d(x+y)}{dt}\right|_{x+y=\pi} = (A + B + C + D)\sin x.$$

可以看出，若 $A + B + C + D = 0$，则 $x + y = \pi$ 是轨线，拓扑结构如图 11.16 所示。否则，$x + y = \pi$ 上除奇点 $O'' = O'$ 外处处为无切，我们有图 11.17 和图 11.18。



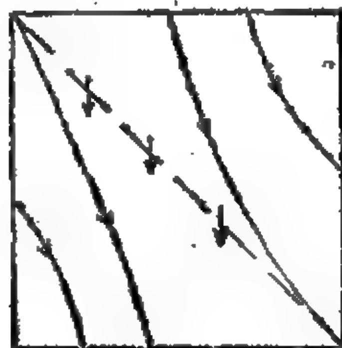
$A+B+C+D=0$

图 11.16



$C+D>-A-B$

图 11.17



$C+D<-A-B$

图 11.18

---

1) 由此可见：这时方程在 (x, y) 平面上虽然有通积分(13)，但任一轨线在 T^2 上却为处处稠密的非闭 P 式稳定轨线。由图 11.15 我们已看出，T^2 上的轨线是由 S_2 中对应于不同常数的轨线拼接而成的。

定理 2. 设在方程(1)中有 $A+B+C+D=0$. (i) 如果 $A=-D$ (从而 $B=-C$), 则环面充满了闭轨. (ii) 如果 $A\neq -D$, 从而 $A+D=-B-C\neq 0$, 则(1)有唯一的闭轨 $x+y=\pi$, 它是一切其它轨线的 ω 和 α 极限集, 因而是唯一的(半稳定)极限环.

证. (i) 当 $A=-D$, $B=-C$ 时 S_2 上的向量场不但对称于$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 而且还对称于直线 $x+y=\pi$ 和直线 $x=y$. 由此易见对 S_2 的左边界上一点 P_1 出发的轨线 $\widehat{P_1P_2}, \widehat{P_2'P_1'}$ 将在环面上构成闭轨, 这里 P_i' 是 P_i 的对称点. 事实上, 这时(1)在 (x,y) 平面上有通积分(3).

(ii) 当 $A+D=-(B+C)\neq 0$ 时与第(一)段的情况 1 一样讨论知道: 既然当 $\delta=\frac{A+D}{2}=0$ 时有一系闭轨, 所以当 $\delta\neq 0$ 时方程没有闭轨, 除了使(7')等于零的点集 $x+y=\pi$ 以外. 由前面知道 $x+y=\pi$ 是(1)的奇闭轨, 易见它是半稳定环.

附注. 定理 2 的结论事实上与 A, D 的符号无关, 即其第一部分对 $A<0, D\geqslant 0$ 也成立, 第二部分当 $A>0$, $D>0$ 时也成立.

现在研究 $A+B+C+D\neq 0$ 的情况. 设 $C_0+D=-(A+B)$. 则 $C_0\neq C$. 在条件 $AB>0$ 之下,

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial P}{\partial C} & \frac{\partial Q}{\partial C} \end{vmatrix} = (A\sin x + B\sin y)\sin x$$

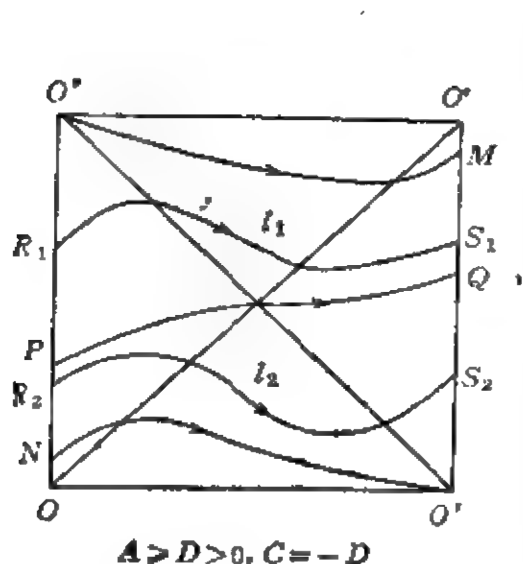
在 S_2 中保持常号, 故(1)对 C 构成 T^2 上的广义旋转向量场. 已知当 $A=-D$, $C=C_0$ 时(1)有一系旋转数为 1 的闭轨, 故在 $A=-D$, $C\neq C_0$ 时(1)没有旋转数为 1 的闭轨. 又因为当 $A\neq -D$, $C=C_0$ 时(1)有旋转数为 1 的半稳定极限环, 故当 $A\neq -D$ 而 $C>C_0$ 时 (1) 没有旋转数为 1 的闭轨. 在这两种情况

(1)的轨线或为遍历，或有闭轨，而其旋转数$\neq 1$。另一方面，若$A \neq -D$，而 $C < C_0$，则(1)将有至少两个(它们关于$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$对称)具有不同稳定性的极限环，它们是从 $A \neq -D$，$C = C_0$ 时(1)的半稳定环分裂而得到的.

(iii) $A \geqslant D > 0$。

首先设 $C = -D < 0$。则水平等倾线为 $x = y$ 与 $x + y = \pi$(图 11.19)。考虑到从 O'' 有唯一的轨线进入 S_2，又有唯一的轨线从 S_1 进入 O'，以及经过 S_2 的轨线 $\widehat{PQ}$，可知图 11.19 中由轨线导出的 $\overline{PO''}$ 到 $\overline{QM}$ 的映象是一压缩映象，而它的不动点确定一条闭轨 l_1。由对称性，知 l_1 下方还有一条闭轨 l_2。

现在证明 l_1 和 l_2 是(1)的仅有的两条闭轨线。将方程(1)



$A > D > 0, C = -D$

图 11.19

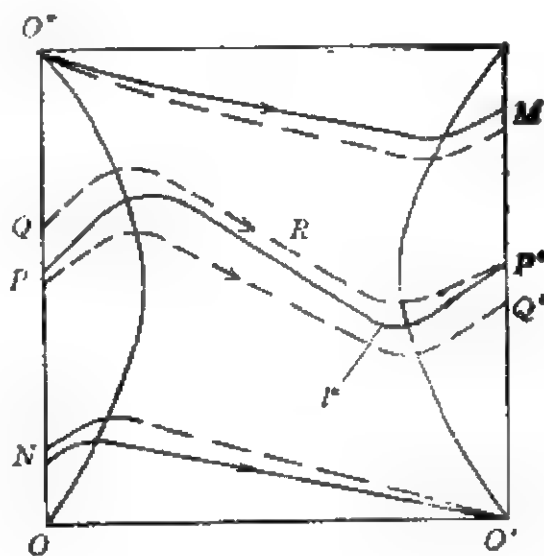


图 11.20

沿 l_1 积分，得[1]

$$y_{S_1} - y_{R_1} + \int_0^{\pi} \frac{C \sin x + D \sin y}{A \sin x + B \sin y} dx$$

1) 下式右边的积分是沿着轨线的.

但 $y_{S_1}=y_{R_1}$，故

$$\int_0^\pi \frac{C\sin x+D\sin y}{A\sin x+B\sin y}dx=0. \tag{14}$$

注意

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C\sin x+D\sin y}{A\sin x+B\sin y}\right)=\frac{(AD-BC)\sin x\cos y}{(A\sin x+B\sin y)^2}. \tag{15}$$

由图 11.19 容易看出，由于有一条轨线 $\widehat{PQ}$ 分开 l_1 和 l_2，沿着 $\widehat{PQ}$ 点的 y 坐标不断增加，所以 $y_P<\frac{\pi}{2}$，$y_Q>\frac{\pi}{2}$，并且 l_1 应保持在 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\pi$ 区域中，在其中(15)式右边保持常号。结合条件(14)，可知 l_1 在此区域中是唯一的闭轨。同样，l_2 是区域 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 中的唯一闭轨。

现在研究 l_1 和 l_2 随 C 而变化的情况。当 C 从 $-D$ 增大时 l_1 与 l_2 相互分开，如前极限环个数保持为二。当 $C\to0$ 时，l_1 与 l_2 分别趋于 $y=\pi$ 及 $y=0$，但 $y=0$ 即 $y=\pi$。由此可见，当 $C=0$ 时方程(1)有半稳定环 $y=0$[1]。如果 C 从 $-D$ 减小，则 l_1 与 l_2 相互接近。当 C 取一值 $C^*<-D$ 时，l_1 与 l_2 重合而成为过点$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的另一半稳定环 l^*。由于此时水平等倾线 $C^*\sin x+D\sin y=0$ 已不再是两相交直线，故 l^* 如图 11.20 所示。在 C 的整个变化区间 $[C^*,0]$ 中，极限环的旋转数永远保持为0。当 C 从 C^* 继续减小时 $l^*=\widehat{PRP'}$ 破裂，过 P 的轨线向下转成为 $\widehat{PQ'}$，过 P' 的轨线向上转成为 $\widehat{QP'}$，方程不再存在 $\rho=0$ 的第二类闭轨。当 C 从 C^* 减小时，$\widehat{O''M}$ 亦向下转，$\widehat{NO'}$ 则向上转(如图11.20中虚线所示)。直到 $C=-D-A-B$ 时 $\widehat{O''M}$ 与 $\widehat{NO'}$ 重合而成为方程(1)的直线解。因此又出现半稳定极限环 $x+y$

1) $|C|\ll1$ 时即使(12)的第一方程可以有两个实根，但由于 $D-A\leqslant0$，k_1，k_2 应都取负值。故从 O，O^* 不能有轨线进入 S_2。

$=\pi$，它的旋转数 $\rho=1$。

当 C 从 $-D-A-B$ 再减少时，半稳定环 $x+y=\pi$ 分裂成为两个单重环 l_1', l_2'（见图 11.21）。直到 C 减小到达 C^{**} 时（C^{**} 的值现在无法确定），l_1' 与 l_2' 向另一个方向接近而重合，成为图 11.21 中所画的半稳定环 l^{**}。在 C 的整个变化区间 $[C^{**}, -D-A-B]$ 中，方程(1)的极限环的旋转数永远保持为 $\rho=1$。

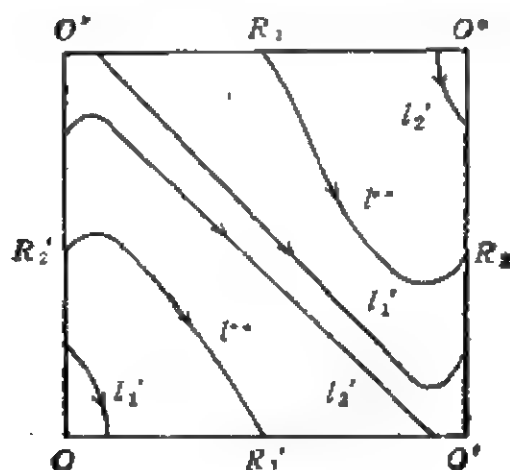


图 11.21

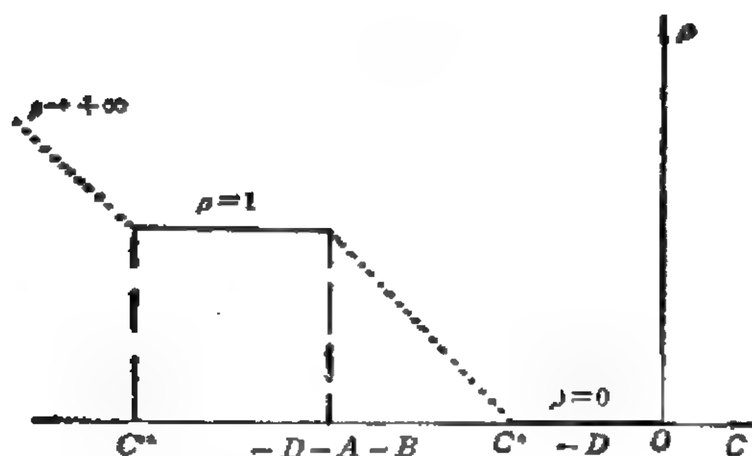


图 11.22

由于旋转数 ρ 随着 C 而连续变化，可知当 C 从 C^* 减小到 $-D-A-B$ 时，ρ 将取到 0 与 1 之间的一切实数值。当 ρ 取无理数值时，易见每一轨线都是遍历的，不存在闭轨线。当 ρ 取每一有理数值时，是否其对应的 C 值都构成一个小区间，从而出现：

在 (C,ρ) 平面上，作为 C 的函数，旋转数 ρ 的图形象是一个 Cantor 集合那样呢？（见图 11.22.）这一点在罗定军的 [79] 中有详细证明，因篇幅过长，此处从略。最后，当 $C\to-\infty$ 时(1)有极限方程 $\frac{dx}{dy}=0$，即一切轨线的极限位置是铅直直线 $x=$ 常数，相应的 $\rho=\infty$。因此，我们可以画出图 11.22。由此可见，在 C 的区间 $(-D-A-B, C^*)$ 中，方程 (1) 的轨线的拓扑结构的变化有无数种之多。实际上，在任意小的，其端点使 ρ 取两个不同的有理数值的 C 的变化区间中，方程(1)的轨线的拓扑结构的变化也是如此。这种现象在一篇研究生物数学的国外论文 (W. L. Keith and R. H. Rand, *J. Math. Biology* (1984), v. 20, 133—152) 中也出现过，其中研究的也是三角多项式系统：$\dot\varphi_1=\omega_1-\omega_2-2\alpha\sin\varphi_1+2(\alpha-1)\sin\varphi_2$，$\dot\varphi_2=\omega_1-2\omega_2-3\alpha\sin\varphi_1+3(\alpha-1)\sin\varphi_2$[1)]。

(iv) $D>A>0$。

现在如果 $(D-A)^2+4BC<0$，则 k_1, k_2 有共轭复根，而 $k_2'<0<k_1'$，故奇点性质同情况 (iii)，轨线图也是如此。但若 $(D-A)^2+4BC\geqslant 0$，则 $k_1\geqslant k_2>0$，即除 O',O'' 外，从 O，O^* 也有轨线(一条或两条)沿特殊方向进入 S_2。此时除有包含极限环 l_1,l_2 之类的柱面形状的区域（由 $O''M$ 与 NO' 所围成）以外，在 $O''M$ 的上方，NO' 的下方将出现充满着由 O 出发而进入 O^* 的奇闭轨的单连通区域（图 11.23 中的阴影区)。这种区域当从 O 出发，而有斜率为 k_1 的轨线与 $\overline{OO'}$ 的交点 S 的横坐标 $x_S<\frac{\pi}{2}$ 时不可能存在。当 $x_S=\frac{\pi}{2}$ 时开始出现从 O 出发而进入 O' 的轨线。x_S 增大时由一条轨线扩大成为以 O,O^* 为顶点的新月形区域。最后当 $x_S=\pi$，$S=O'$ 时，整个环面被分成两个区域。一个是单连通的，其中的轨线的旋转数都是 0；另一个是双连

---

1) 此外，[80] 中还证明了更一般的、关于 S^1 到它自身的依赖于一个参数 s 的微分同胚的、旋转数为 s 的 Cantor 函数的充分条件。

通域，其内部每一轨线的旋转数都是 $\frac{1}{2}$。图 11.24 中所画的是这种情况的一个特例，此时直线 OO^*: $x=y$ 成为轨线，$A+B=C+D$。

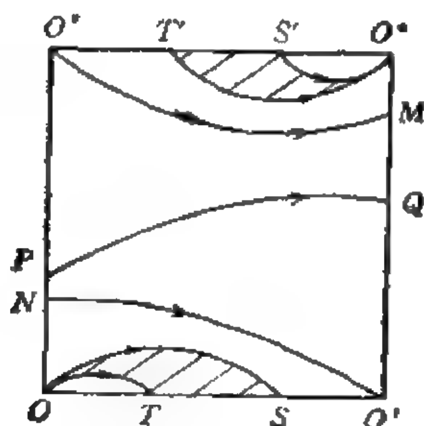


图 11.23

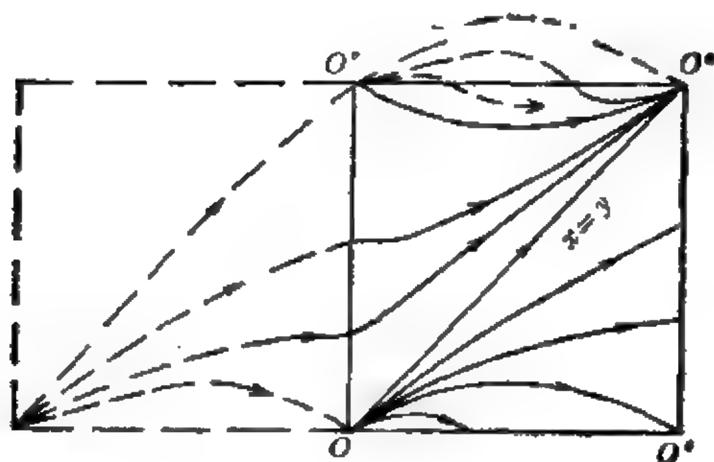


图 11.24

(v) $A<0$, $D<0$。

这一情况可借变换 $x'=\pi-y$, $y'=\pi-x$ 化为 (iii) 或 (iv)。

(vi) $A<0$, $D>0$。

这时 k_1 与 k_2 或同为复数，或同为正实数，又 $k_2'<0<k_1'$，故可以出现 (i)—(v) 的所有情况。由于 $AD-BC>0$，易见在 S_2 中过 $O''O^*$ 的水平等倾线在铅直等倾线的下方，过 OO' 的

水平等倾线在铅直等倾线的上方，故不可能出现比图 11.19，11.26 更复杂的全局拓扑结构。

下面研究第 II 种情况。

II. $A>0$, $D>0$。

借助于情况 I 的分析，现在我们只须讨论下列几种情况。

(i) $B=C=0$ 这时(1)有首次积分

$$\left(\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)^A=K\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^D,$$

环面被通过 O 的奇闭轨线所充满，S_2 的四边都是轨线(图 11.6 的 $\frac{1}{4}$)。

(ii) $C=0$, $B>0$。 这时 $y=0$ 和 $y=\pi$ 都是轨线。按照 D 的大小有四种不同的全局拓扑图，即图 11.25—11.28。在图

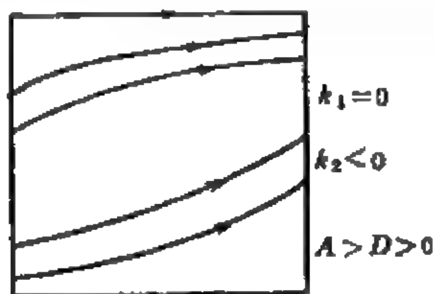


图 11.25

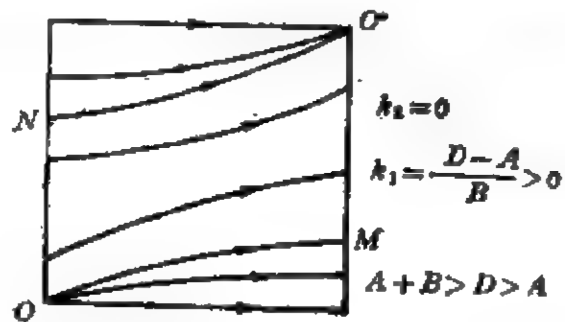


图 11.26

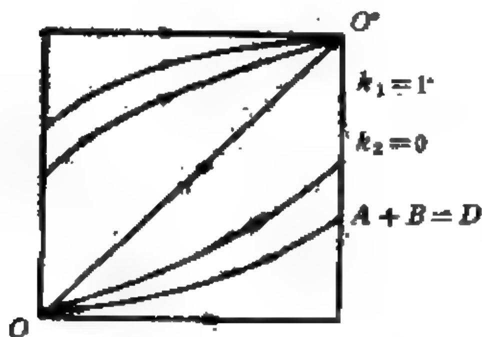


图 11.27

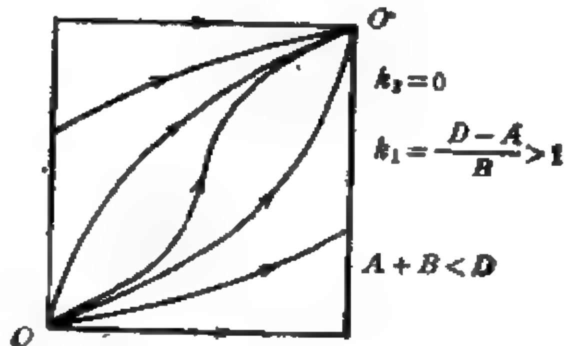


图 11.28

11.25 中 O 是一可去奇点，$y=0$ 是半稳定环，在图 11.26—11.28

中 O 是真正的奇点，有无数多条奇闭轨通过 O，它们也充满了整个环面。在图 11.26 中有两种可能：a）两条分界线 $\widehat{OM}$ 与 $\widehat{NO^*}$ 最后重合成为一条。设这时它有旋转数 $\frac{1}{p}$，$p \geqslant 1$ 为正整数，则一切其它轨线，除了 $y=0$ 以外，都有旋转数 $\frac{1}{p+1}$。 b）$\widehat{OM}$ 与 $\widehat{NO^*}$ 在环面上是两条不同的轨线。则它们和 $y=0$ 一起把环面分成两个区域，其一充满着旋转数为 $\frac{1}{p}$ 的奇闭轨线，另一则充满着旋转数为 $\frac{1}{p+1}$ 的奇闭轨线。图 11.27 和 11.28 分别表示 $p=1$ 时的情况 a）和情况 b）。易见在图 11.26 中如果 $B \gg D > A$，则 $0 < k_1 \ll 1$，这时 p 可以很大。

(iii) $B < 0$，$C = 0$。这里有三种不同的相图，如图 11.29—11.31 所示。情况和 (ii) 类似，图 11.29 可以有两种不同的拓扑结构，而图 11.30 和图 11.31 分别表示 $p=0$ 时的每一种情况。

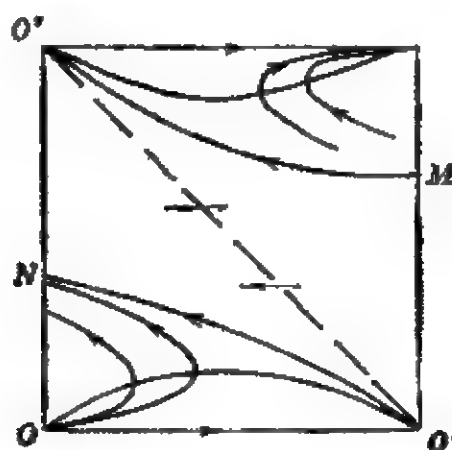


图 11.29

(iv) $B = 0$，$C \neq 0$。这一情况可借变换 $x = y'$，$y = x'$ 化为 (ii) 与 (iii)。

(v) $C < 0, B < 0$。图 11.32—11.34 对不同的 A, B, C, D 的值给出三个不同的相图。在图 11.32 中，三条分界线 $O'O, O''O'$，



$D=-A-B>A$

图 11.30

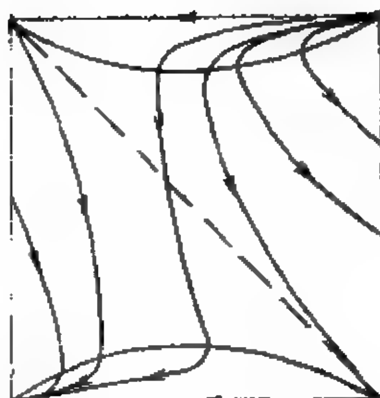
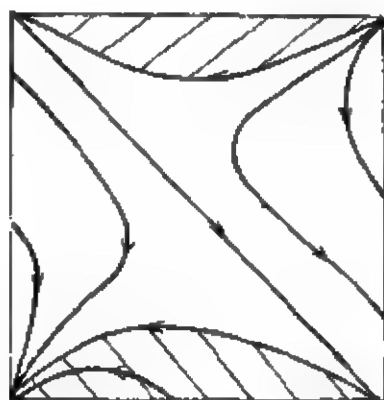


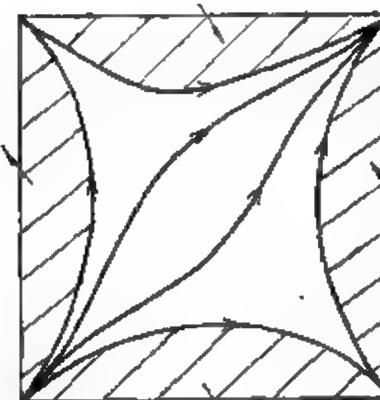
图 11.31

和 O^*O'' 将环面分割而成为两个区域，在一区域中充满着旋转数为 $\rho=0$ 的奇闭轨，另一区域则充满着 $\rho=\infty$ 的奇闭轨。在图 11.33 中四条分界线 $OO', OO'', O''O^*$，$O'O^*$ 将环面分割而成为三个区域，分别充满着旋转数 $\rho=0$，1 和∞的奇闭轨。图 11.34 有两种可能的不同拓扑结构，其一类似于图 11.32，另一类似于图 11.33。



$C+D=-A-B$

图 11.32



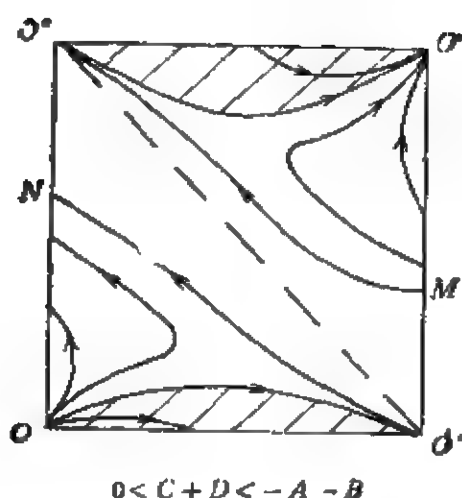
$C+D>0, A+B>0$

图 11.33

(vi) $C>0$，$B<0$。这时可借变换 $x'=y$，$y'=x$ 化为情况 I 的 (iii) 和 (iv)。

(vii) $C>0$，$B>0$。这时可用变换 $x'=y$，$y'=x-x$ 将它化为 I 的情况 (ii)。

总结以上对 S_2 上的线性三角多项式系统的相图的分析，知



$0<C+D<-A-B$

图 11.34

有下列几种不同的类型:

1. 周期运动型,

2. 遍历运动型,

3. 极限环型——两个单重环或一个半稳定环,

4. 奇异环型——一个区域,两个区域或三个区域,

5. 混合型——3)和4)同时存在.

注意 1. 本节所讨论的线性三角多项式系统右方都只含正弦函数. 如果改其中之一、二、三或四个正弦函数为余弦函数, 则可得到许多类似的线性三角多项式系统. 它们之中本质上不同的只有四种,除了方程(1)以外,其它三种系统是:

$$\dot{x}=A\cos x+B\sin y,\quad \dot{y}=C\sin x+D\sin y, \tag{16}$$

$$\dot{x}=A\sin x+B\cos y,\quad \dot{y}=C\sin x+D\sin y, \tag{17}$$

$$\dot{x}=A\cos x+B\cos y,\quad \dot{y}=C\sin x+D\sin y. \tag{18}$$

我们不知道, 例如, (16)的一切可能的相图是否拓扑等价于(1)的一切可能相图? 如果不是,则这事实就说明: 当我们研究环面上的线性三角多项式系统时, 其内容要比平面上的线性齐一次系统(2)丰富得多, 方程由一个变为四个, 基本正方形可以有两种.

注意 2. 在平面上, 系统

$$\dot{x} = ax + by + p, \quad \dot{y} = cx + dy + q \tag{19}$$

在有孤立奇点的情况下总可通过移轴化为(2)；如果没有奇点，则 $ad - bc = 0$，情况非常简单．但在环面上则否．方程

$$\dot{x} = A\sin x + B\sin y + E, \dot{y} = C\sin x + D\sin y + F \tag{20}$$

不可能通过平移坐标轴而化为(1)．对(20)迄今尚无人系统地研究过、它的相图到底有多少种不同的拓扑结构．

注意 3． 若方程右方含有 $\cos 2x$，$\sin 2x$，$\cos 2y$，$\sin 2y$ 等，则此系统称为环面上的二次三角多项式系统．注意 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$，可知与

$$\dot{x} = A\cos 2x + B\sin y, \dot{y} = D\cos 2y + C\sin x \tag{21}$$

对应的二次多项式系统是

$$\dot{x} = A - 2Ax^2 + By, \quad \dot{y} = D - 2Dy^2 + Cx. \tag{22}$$

但若在(21)中改 $\cos 2x$ 为 $\sin 2x$，$\cos 2y$ 为 $\sin 2y$，那么虽然 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，但二次系统中就找不到和(21)对应的系统了．由此可见当我们考虑方程右方含 $\sin x$，$\sin y$，$\cos x$，$\cos y$，$\sin 2x$，$\cos 2x$，$\sin 2y$，$\cos 2y$ 的三角多项式系统时，其含义要比平面上的二次多项式系统更为丰富．此外，对一个最一般的环面二次三角多项式系统：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(\sin x, \sin y, \cos x, \cos y, \sin 2x, \\ &\qquad \cos 2x, \sin 2y, \cos 2y), \\ \dot{y} &= Q(\sin x, \sin y, \cos x, \cos y, \sin 2x, \\ &\qquad \sin 2y, \cos 2x, \cos 2y), \end{aligned} \tag{23}$$

P, Q 为其变元的线性函数，我们也可以提出 Hilbert 问题：此系统最多有几个第一类极限环？最多有几个第二类极限环？由本节对方程(1)的分析可知：答案一定和平面二次多项式系统的 Hilbert 问题的答案不一样．

对于环面三角多项式系统，除了[78]外，还有[81]，[82]．在[81]中研究了方程

$$\dot{x} = 2A\sin\frac{x}{2} + B\sin y, \dot{y} = 2C\sin\frac{x}{2} + D\sin y, \tag{24}$$

基本正方形为 S_1。此方程在 S_1 的边界上有三个鞍点和三个非鞍点，在环面上则有两个指标为零的非初等奇点。根据[81]中对(24)的相图拓扑结构所作的分析来看，似乎情况还要比方程(1)在 S_2 上的讨论简单一些。注意，若在(24)中令 $x=2u, y=2v$，则(24)化为

$$\dot{u}=A\sin u+\frac{B}{2}\sin 2v,\ \dot{v}=C\sin u+\frac{D}{2}\sin 2v, \quad (25)$$

定义域则由 S_1 变为 S_2。(25)已是环面上的二次三角多项式系统了。

在[82]中研究了方程

$$\dot{x}=\frac{A}{2}\sin 2x+B\sin y,\quad \dot{y}=C\sin x+D\sin y, \qquad (26)$$

基本正方形为 S_2。(26)根据 A,B,C,D 的不同数值在环面上可以只有一个指标为零的奇点，也可以有两个指标为零的奇点，还可以有三个奇点，其指标分别为 $-1,0,1$。(25)和(26)的相图都不对称于$\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$。[82]对(26)的分析说明其它情况与(1)类似，有时可以证明第二类极限环的存在和唯一性，有时出现第一类极限环，但唯一性无法证明。

S_1 或 S_2 上定义的最一般的三角多项式系统不一定可以看成射影平面或 Klein 瓶上的 C^1 系统，因为它在对边等同的两点不一定确定相同的向量。但某些特殊形式的三角多项式系统却可以同时定义 PR^2 或 K^2 上的 C^1 系统。例如

$$\dot{x}=A\sin x+2B\sin\frac{y}{2},\quad \dot{y}=2C\sin\frac{x}{2}+D\sin y \qquad (27)$$

定义在 S_1 上时可以导出 PR^2 上的 C^1 系统。这是由于对两个被等同的点 $P(0,y)$ 和 $P'(2\pi,2\pi-y)$ 有：

$$\dot{x}|_P=2B\sin\ \frac{y}{2}=\dot{x}|_{P'},\quad \dot{y}|_P=D\sin y=-\dot{y}|_{P'},$$

而对另两个被等同的点 $Q(x,0)$ 和 $Q'(2\pi-x,2\pi)$ 有

$$\dot{x}|_Q = A\sin x = -\dot{x}|_{Q'},\quad \dot{y}|_Q = 2C\sin\frac{x}{2} = \dot{y}|_{Q'},$$

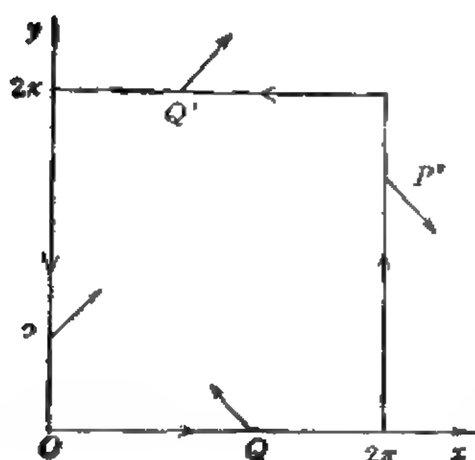


图 11.35

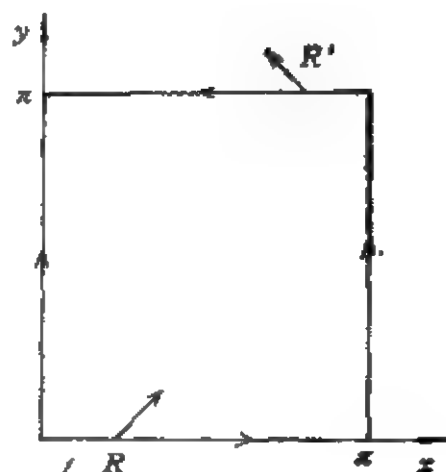


图 11.36

向量的示意图见图 11.35。对方程(27)在[87]中做了一些分析.由于现在奇点个数最多可能有五个,故相图的不同拓扑结构也比(1)更为复杂了。

当方程具有另一种特殊形式时它可以被看成 Klein 瓶上的三角多项式系统。例如定义在 S_2 上的方程(即方程(26))

$$\dot{x} = \frac{A}{2}\sin 2x + B\sin y,\quad \dot{y} = C\sin x + D\sin y$$

确定 Klein 瓶上的三角多项式系统,因为对 $R(x,0)$ 和 $R'(\pi-x,\pi)$ 有

$$\dot{x}|_R = \frac{A}{2}\sin 2x = -\dot{x}|_{R'},\quad \dot{y}|_R = C\sin x = \dot{y}|_{R'},$$

见图 11.36。但方程(26)在 Klein 瓶上的相图没有人研究过。如果能研究一下,并把它和同一方程在环面上的相图相比较,将是有意义的事。

又方程(27)在 S_1 上定义,既可视为 T^2 上的动力系统,也可视为 PR^2 或 K^2 上的动力系统,若能再研究它在 T^2 和 K^2 上的相图,并把同一方程在三个不同曲面上所定义的动力系统加以比较,也是有意义的。

后记. 作者最近又在[88]中看到关于环面微分方程

$$\dot{x} = \alpha_1[\sin(x-y) - \sin x - \beta_1],$$
$$\dot{y} = \alpha_2[\sin(y-x) - \sin y - \beta_2]$$

(其中 $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$)的全局结构分析(包括奇点性质,参数平面($\beta_1$, β_2)上的分支曲线,以及第一,二类极限环的存在性,唯一性和唯二性),并指出这种分析对于研究一阶交叉耦合锁相环路的捕获和跟踪性能是有用处的。

§12. 环面上的 van der Pol 方程及其推广

研究环面上的三角多项式系统，除了与线性常系数齐次或非齐次方程相当的方程(§ 11 方程(1),(16),(17),(18),(20))以外，较为简单且重要的就是与平面 van der Pol 方程相当的方程

$$\dot{x} = \sin y,\quad \dot{y} = -\sin x + \mu \sin 3y. \tag{1}$$

注意：与非线性振动论中的 van der Pol 方程

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \tag{2}$$

相当的二维定常方程组是

$$\dot{x} = u,\quad \dot{u} = -x + \mu(1 - x^2)u, \tag{3}$$

或 Liénard 平面中的方程组

$$\dot{x} = y - \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right),\quad \dot{y} = -x, \tag{4}$$

或对调 x, y,并且将 t 改号,得到

$$\dot{x} = y,\quad \dot{y} = -x + \mu\left(\frac{y^3}{3} - y\right). \tag{5}$$

回忆 $\sin 3y = 3\sin y - 4\sin^3 y$，即知我们称 (1) 为环面上的 van der Pol 方程是合适的.

在 70 年代末田景黄对方程(1)作定性分析，他得到：当 $0 < |\mu| \ll 1$ 时(1)在(0,0)外围存在至少两个极限环的结论。定量计算表明极限环的唯二性,并且不是小振幅的. 这就说明：方程(1)和方程(5)既有相似之处,也有不同之处。因为对于(5),我们知道当 $0 < |\mu| \ll 1$ 时有唯一的极限环 Γ;当 $\mu \to 0$ 时 Γ 以 $x^2 + y^2 = 4$ 作为其极限位置. 下面介绍田景黄的[83]的结果.

现在取 $S_1 = [0,\ 2\pi] \times [0, 2\pi]$ 为基本正方形，易见(1)在 S_1 上有九个奇点：

$$O(0,0),\ O_2(2\pi,0),\ O_3(2\pi,2\pi),\ O_4(0,2\pi),\ O_5(\pi,\pi)$$

和

$$A_1(0,\pi),\ A_2(\pi,0),\ A_3(2\pi,\pi),\ A_4(\pi,2\pi).$$

前一组奇点有指标+1,后一组有指标−1,为初等鞍点。到了环面 T^2 上，O,O_2,O_3,O_4 叠合为一点,A_1 与 A_3 叠合，A_2 与 A_4 叠合,故 T^2 上有四个初等奇点。

指标 +1 的奇点 O 与 O_5 的性质随 μ 的变化而有不同:

当 $\mu=0$ 时,O 与 O_5 都是中心;

当 $0<\mu<\dfrac{2}{3}$ 时，O 为不稳定焦点，O_5 是稳定焦点;

当 $\mu=\dfrac{2}{3}$ 时,O 是不稳定单向结点，O_5 是稳定单向结点;

当 $\mu>\dfrac{2}{3}$ 时,O 是不稳定结点，O_5 是稳定结点。

若 $\mu<0$,则(1)可借变换 $x=x',\ y=-y',\ t=-t'$ 而化为 x',y',t' 的同一方程,其中 $\mu'=-\mu>0$。

方程(1)的铅直等倾线是 $y=0,\ y=\pi,\ y=2\pi$,而水平等倾线的图形则随 μ 而变,可分为下列四种(图 12.1—12.4):

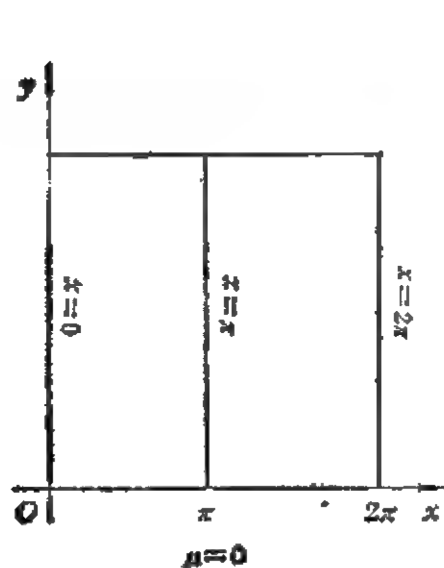


图 12.1

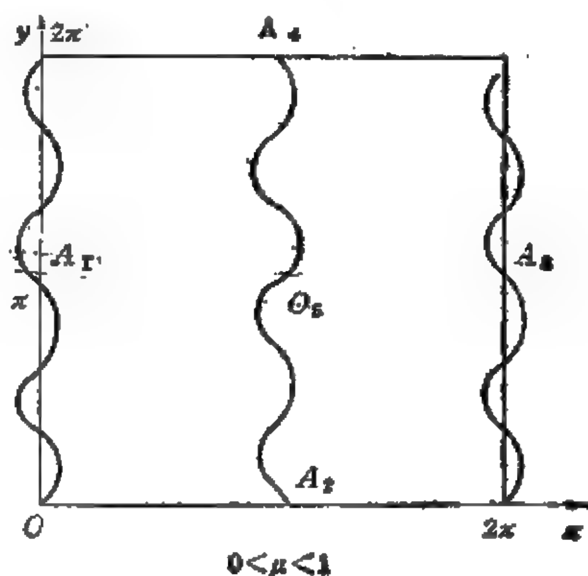
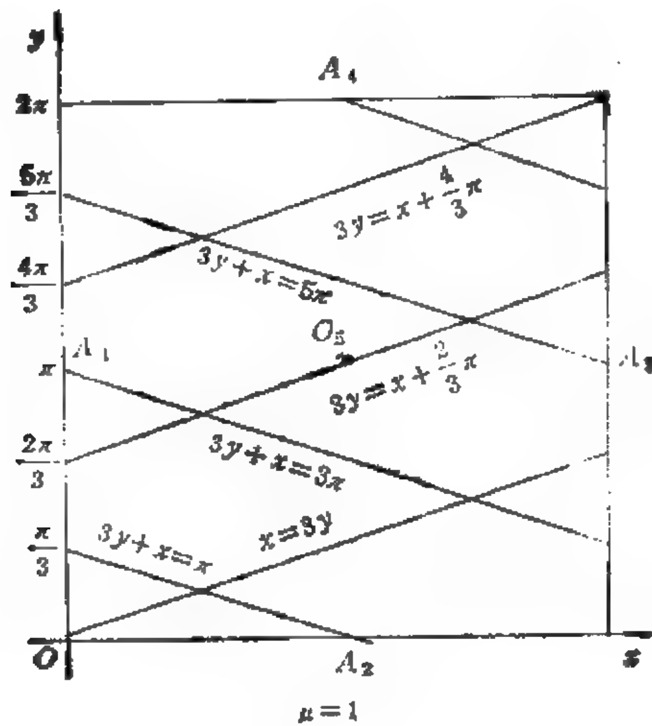
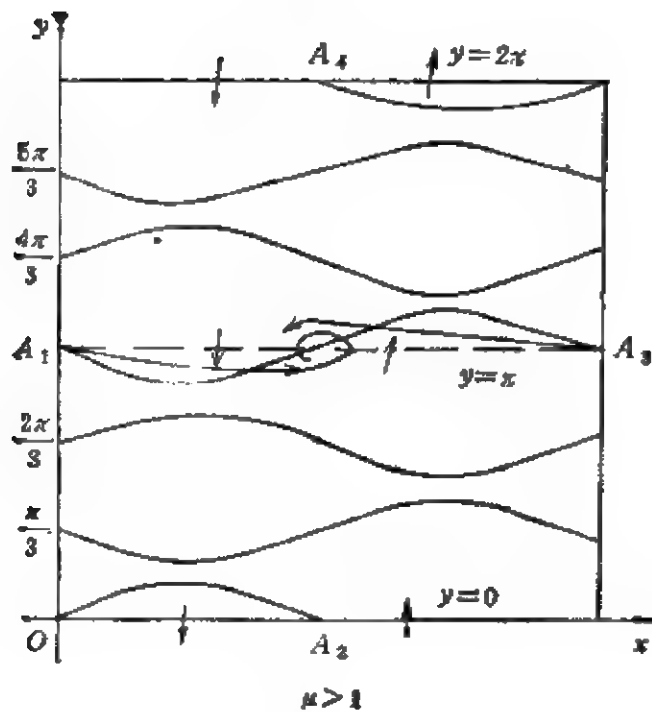


图 12.2



$\mu=1$

图 12.3



$\mu>1$

图 12.4

比较鞍点分界线的斜率和水平等倾线在鞍点的斜率对今后的讨论是有用的，容易算出前者为

$$K_1 = \frac{3}{2}\mu + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\mu\right)^2 + 1} > 0,$$

$$K_2 = \frac{3}{2}\mu - \sqrt{\left(\frac{3}{2}\mu\right)^2 + 1} < 0.$$

而后者为$-\frac{1}{3\mu}$。由于

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\mu\right)^2 + 1} - \frac{3}{2}\mu < \frac{1}{3\mu} \qquad (\mu > 0),$$

所以在鞍点邻近，斜率为 K_2 的分界线比(斜率为负的)水平等倾线更接近水平方向一些。

下面研究极限环问题。(1)的发散量为

$$\operatorname{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 3\mu\cos 3y. \tag{6}$$

为了容易观看，不妨就研究 O_5 外围，看看在什么条件之下能存在第一类极限环。由(6)看出当 $\mu \neq 0$ 时发散量在带域 $\frac{5}{6}\pi < y < \frac{7}{6}\pi$ 中保持定负，故不可能有第一类极限环全部位于此带域中。事实上可以证明在比它宽一倍的带域 $\frac{2\pi}{3} < y < \frac{4\pi}{3}$ 中也是如此。这是因为

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial P}{\partial \mu} & \frac{\partial Q}{\partial \mu} \end{vmatrix} = \sin^2 y(3 - 4\sin^2 y),$$

在 $\frac{2\pi}{3} < y < \frac{4\pi}{3}$ 中为非负，由于当 $\mu = 0$ 时 O_5 是中心，故当 $\mu \neq 0$ 时(1)在此带域中不存在闭轨。由前可知不妨限于讨论 $\mu > 0$ 的方程(1)。

定理 1. 方程 $(1)_\mu$ 当 $\mu \geq 1$ 时不存在第一类闭轨。

证. 这可由图 12.4 看出。前面已经证明：从 A_1 出发的分

界线斜率为负，但保持在过 A_1 的水平等倾线的上方；最后在水平等倾线斜率为正的部分穿过去，然后回头向右上方前进。同样，从 A_3 出发的分界线应保持在过 A_3 的水平等倾线的下方而向左上方前进，最后在水平等倾线的斜率为负的部分穿过它，然后向左下方前进，并且它应保持在前一等倾线的上方。这两条等倾线都应绕着 O_3 打转，且其内部不可能有闭轨，这是因为这两条分界线应都保持在带域 $\frac{5}{6}\pi < y < \frac{7}{6}\pi$ 中之故。

下面研究 $0<\mu<1$ 的情况。在这里要用定性方法证明第一类闭轨的存在尚有困难。因此改用解析方法来研究当 μ 从零变为正时在 $(1)_{\mu=0}$ 的一系闭轨

$$\Gamma^h:\ \cos x + \cos y = h \qquad (0 \leqslant h < 2) \tag{7}$$

中，哪一些闭轨能产生 $(1)_{\mu>0}$ 的极限环？

注意：Γ^h 随 h 的增加而单调缩小。当 $h=0$ 时(7)的轨迹为四条直线：

$$x+y=\pm\pi,\quad x-y=\pm\pi,$$

一起围成一个以 O 为中心的正方形。当 $h=2$ 时即得此正方形内部的孤立点 O。现在由[38] § 4 中所写的理论知道能在 $\mu \neq 0$ 时产生极限环的 Γ^h，其 h 必须满足等式

$$A_1(h) = \oint_{\Gamma^h} [QP'_\mu - PQ'_\mu]\exp\left(-\int_0^t \operatorname{div}(P,Q)dt\right)\Big|_{\mu=0} dt = 0,$$

即

$$A_1(h) = -\oint_{\Gamma^h} \sin y \sin 3y dt = 0. \tag{8}$$

上式右边又可化为

$$\begin{aligned} A_1(h) &= -\oint_{\Gamma^h} \sin 3y dx \\ &= 3\iint_{\operatorname{int}\Gamma^h} \cos 3y dx dy \\ &= 12\iint_{D_h} \cos 3y dx dy, \end{aligned}$$

其中 D_h 是 Γ^h 与 $x=0$，$y=0$ 所围的第一象限中的区域。容易算出

$$\iint_{D_h}\cos 3y\,dx\,dy=\int_0^{\cos^{-1}(h-1)}dx\int_0^{y_h(x)}\cos 3y\,dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\cos^{-1}(h-1)}\sin 3y_h(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\cos^{-1}(h-1)}\sqrt{1-(h-\cos x)^2}$$

$$\times[4(h-\cos x)^2-1]\,dx,$$

这样,问题就归结为研究

$$B_1(h)=\frac{1}{4}A_1(h)$$

$$=\int_0^{\cos^{-1}(h-1)}\sqrt{1-(h-\cos x)^2}\,[4(h-\cos x)^2-1]\,dx \tag{9}$$

的正零点了。不难看出

$$B_1(0)=\frac{2}{3}>0,\ B_1(h)>0\ \text{当}\ 2>h\geqslant 1.5\ \text{时}.$$

现在来证明 $B_1(1)<0$。

为此田景黄得到积分中值定理的一个新的推广：

引理 1. 设函数 $f(x)$，$\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 中连续，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 中不增加，又在开区间 (a,b) 内恰存在一点 c，使 $\varphi(x)$ 在 $[a,c]$ 中为非正,而在 $[c,b]$ 中为非负,则有

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\leqslant f(c)\int_a^b\varphi(x)dx.$$

证. 对上式左边应用积分第一中值定理,得到

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\int_a^c f(x)\varphi(x)dx+\int_c^b f(x)\varphi(x)dx$$

$$=f(\xi_1)\int_a^c\varphi(x)dx+f(\xi_2)\int_c^b\varphi(x)dx, \tag{10}$$

其中 $a\leqslant\xi_1\leqslant c$，$c\leqslant\xi_2\leqslant b$。但由引理中的假设条件有

$$\int_a^c \varphi(x)dx \leqslant 0, \int_c^b \varphi(x)dx \geqslant 0, f(\xi_1) \geqslant \min_{x\in[a,c]} f(x) = f(c),$$

$$f(\xi_2) \leqslant \max_{x\in[c,b]} f(x) = f(c).$$

由(10)式立刻得到

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leqslant f(c)\int_a^c \varphi(x)dx + f(c)\int_c^b \varphi(x)dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)dx.$$

引理证毕。

为了估计 $B_1(1)$，令

$$f(x) = \sqrt{1-(1-\cos x)^2},\ \varphi(x) = 4(1-\cos x)^2 - 1,$$

$$c = \frac{\pi}{3}.$$

则由引理 1 即得

$$B_1(1) \leqslant \sqrt{1-\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[4(1-\cos x)^2 - 1]dx = \frac{5}{4}\sqrt{3}(\pi - 3.2) < 0.$$

这样，由函数 $B_1(h)$ 的连续性可知它至少有两个零点 h_1, h_2，其中 $1 < h_1 < 1.5$，$0 < h_2 < 1$. 于是我们得到结论：

当 $0<\mu \ll 1$ 时方程 (1) 在 O 外围至少有两个第一类极限环 $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$：其中 Γ_1 由 Γ^{h_1} 产生，是稳定的。Γ_2 由 Γ^{h_2} 产生，是不稳定的。两个环都是负定向的。与此对应，在 O_1 外围至少有两个第一类极限环 $\Gamma_1' \subset \Gamma_2'$，$\Gamma_1'$ 是不稳定环，Γ_2' 是稳定环，两环都是正定向的。

数值计算表明：

$$h_1 \doteq 1.2485,\ h_2 \doteq 0.2875,$$

并且除此以外，在 O 外围不再有其它的第二类极限环了。

[83]中除了方程(1)以外还就方程(姑且称之为推广了的环面

van der Pol 方程)

$$\dot{x} = \sin y, \quad \dot{y} = -\sin x + \mu \sin ky \tag{11}$$

对 $k=4,5,6$ 计算了相应的 $A_1(h,k)$ 在 $h\in[0,2]$ 上的零点的近似值,结果表明它恰有 $k-1$ 个单零点。因此[83]中作了如下的猜测：[1)]

方程(11)对 $0<|\mu|\ll 1$,以及任何自然数 k, 在环面上（以 S_1 为基本正方形)恰有 $k-1$ 个包围O的极限环。

看来要从理论上解决这个猜测是不容易的。下面介绍刘世泽和田景黄的工作[84], 其中只证明了(11)至少有 $k-1$ 个包围O的极限环,但证明已比前面所说的要困难得多了。

关于(11)的奇点和等倾线的分析与(1)类似，并且定理1对(11)也保持成立。下面只研究当 $0<\mu\ll 1$ 时(11)能有几个第一类极限环,亦即

$$\begin{aligned} A_1(h,k) &= 4k\iint_{D_h} \cos ky\,dx \\ &= 4\int_0^{\cos^{-1}(h-1)} \sin[k\cos^{-1}(h-\cos x)]dx \end{aligned} \tag{12}$$

在 h 的区间[0,2]中的零点个数问题。我们要证明它至少有 $k-1$ 个零点。先证明几个引理：

引理 2. 对 $0<a<\pi$,函数

$$g_a(y) = \frac{\sin y}{\sqrt{1-(1+\cos a-\cos y)^2}} \tag{13}$$

在区间 $0<y<a$ 中为正,且对 y 单调递增。

证。 $g_a(y)>0$ 是明显的。令

$$x = \cos^{-1}(1+\cos a-\cos y), \tag{13'}$$

则 $g_a(y) = -\dfrac{dx}{dy}$,且 $\cos x+\cos y = 1+\cos a$。由后一式容易算出

1)当 $k=2$ 时在[85]中已从理论上证明(11)至少有一个包围O的第一类极限环。

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{(1+\cos a)(1-\cos x\cos y)}{\sin^3 x}<0,$$

对 $0<x<\pi$, $0<y<\pi$. 上式即

$$\frac{d}{dy}g_a(y)=-\frac{d^2x}{dy^2}>0,$$

故 $g_a(y)$ 对 y 为单调递增。

引理 3. 对 $0<a<\pi$,有

$$A_1(h,k)=4\int_0^a g_a(y)\sin kydy \triangleq 4J(a). \tag{14}$$

证. 在(12)中令 $a=\cos^{-1}(h-1)$, 则得

$$A_1(h,k)=4\int_0^a \sin[k\cos^{-1}(1+\cos a-\cos x)]dx. \tag{15}$$

再在上式中作变量代换

$$y=\cos^{-1}(1+\cos a-\cos x),$$

便得

$$\begin{aligned}A_1(h,k)&=4\int_a^0 \sin ky\cdot\frac{dx}{dy}dy\\&=-4\int_a^0 g_a(y)\sin kydy\\&=4\int_0^a g_a(y)\sin kydy=4J(a).\end{aligned}$$

引理 4. 当 k 为奇数时, $J(\pi)>0$; 当 k 为偶数时, $J(\pi)=0$.

证. 在(14)式中令 $a=\pi$,得

$$\begin{aligned}J(\pi)&=\int_0^\pi g_\pi(y)\sin kydy\\&=\int_0^\pi \sin kydy=\frac{1}{k}[1-(-1)^k]\\&=\begin{cases}0, & \text{当 } k \text{ 为偶数时},\\ \frac{2}{k}, & \text{当 } k \text{ 为奇数时}.\end{cases}\end{aligned} \tag{16}$$

引理 5 (Steffensen 不等式). 设 $f(t)$, $g(t)$ 在区间 $[a,b]$ 中

可积，非负，且 $f(t)$ 单调减少，$g(t)\leqslant 1$。记 $c=\int_a^b g(t)dt$，则有不等式

$$\int_{b-c}^{b} f(t)dt\leqslant\int_a^b f(t)g(t)dt\leqslant\int_a^{a+c} f(t)dt. \tag{17}$$

证明从略，见[86]第 48 页。

引理 6. 对任何自然数 k 有不等式

$$k+\csc\frac{\pi}{2k}-\csc\left(\frac{\pi}{2k}-\frac{1}{k}\right)<\csc\frac{\pi+1}{k}-\csc\frac{\pi}{k}. \tag{18}$$

证. 已知 $\csc x$ 有展开式

$$\csc x=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+\cdots$$

$$(0<|x|<\pi), \tag{19}$$

又有恒等式

$$x^n-y^n=(x-y)\sum_{m=0}^{n-1}x^m y^{n-m-1} \tag{20}$$

及

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^m\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^{n-m-1}<(\pi+1)^m\pi^{n-m-1}. \tag{21}$$

在(20)中先取 $x=x_1=\frac{\pi}{2k}$，$y=x_2=\frac{\pi}{2k}-\frac{1}{k}$，再取 $x=x_3=\frac{\pi+1}{k}$，$y=x_4=\frac{\pi}{k}$，则由(21)式立刻得出

$$x_1^n-x_2^n<x_3^n-x_4^n\qquad(n=1,2,\cdots). \tag{22}$$

其次由不等式

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi(\pi+1)}\right)=0.9780<1$$

可得

$$1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi(\pi+1)}<\frac{1}{\frac{\pi}{2}-1}$$

或

$$1+\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\frac{\pi}{2}-1}<\frac{1}{\pi+1}-\frac{1}{\pi}.$$

最后一不等式即

$$k+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_4}. \tag{23}$$

由(22)及(23)不难看出

$$k+\csc x_1-\csc x_2<\csc x_3-\csc x_4,$$

这就是(18)式,引理证毕。

引理7. 若 k 为偶数,则当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时有 $J(\pi-\varepsilon)<0$。

证。 由(14)式知

$$J(\pi-\varepsilon)=\int_0^{\pi-\varepsilon} g_{\pi-\varepsilon}(y)\sin ky\,dy. \tag{24}$$

在(24)式中作变换 $u=\pi-y$,再记 u 为 y,得

$$J(\pi-\varepsilon)=-\int_\varepsilon^\pi \Phi_\varepsilon(y)\sin ky\,dy, \tag{25}$$

其中

$$\Phi_\varepsilon(y)=g_{\pi-\varepsilon}(\pi-y). \tag{26}$$

由引理2知 $\Phi_\varepsilon(y)$ 在 $\varepsilon\leqslant y\leqslant\pi$ 为正,且为 y 的单调递减函数。现在把 $J(\pi-\varepsilon)$ 分解为和式

$$\begin{aligned}J(\pi-\varepsilon)&=\int_\varepsilon^{\pi/k}-\Phi_\varepsilon(y)\sin ky\,dy\\&\quad+\sum_{j=1}^{k-1}\int_{\frac{j}{k}\pi}^{\frac{j+1}{k}\pi}-\Phi_\varepsilon(y)\sin ky\,dy\\&=J_0+\sum_{j=1}^{k-1}J_j,\end{aligned} \tag{27}$$

其中

$$\begin{cases} J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{k}} -\Phi_\varepsilon(y)\sin kydy = \dfrac{-1}{k}\int_{k\varepsilon}^{\pi} \Phi_\varepsilon\left(\dfrac{y}{k}\right)\sin ydy, \\ J_j = \int_{\frac{j}{k}\pi}^{\frac{j+1}{k}\pi} -\Phi_\varepsilon(y)\sin kydy = \int_0^{\frac{\pi}{k}} -\Phi_\varepsilon\left(y + \dfrac{\pi}{k}j\right) \end{cases} \quad (28)$$

$$\times \sin(ky + \pi j)dy$$

$$= (-1)^{j+1}\int_0^{\frac{\pi}{k}} \Phi_\varepsilon\left(y + \frac{\pi j}{k}\right)\sin kydy$$

$$(j = 1, 2, \cdots, k-1).$$

由 $\Phi_\varepsilon\left(y + \frac{\pi j}{k}\right)$的正性和单减性知有

$$J_1 > -J_2 > J_3 > -J_4 > \cdots > -J_{k-2} > J_{k-1}, \quad (29)$$

而

$$J(\pi - \varepsilon) = J_0 + J_1 + (J_2 + J_3) + \cdots + (J_{k-2} + J_{k-1}).$$

上式右边括号之内的量都是负的,若再能证明

$$J_0 + J_1 < 0, \quad (30)$$

即得 $J(\pi - \varepsilon) < 0$ 了. 下面就来证明(30)式.

由(28)式可得

$$J_0 + J_1 = \frac{1}{k}\left(-\int_{k\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \Phi_\varepsilon\left(\frac{y}{k}\right)\sin ydy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_\varepsilon\left(\frac{\pi + y}{k}\right)\sin ydy\right) + \frac{1}{k}\left[-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Phi_\varepsilon\left(\frac{y}{k}\right)\sin ydy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Phi_\varepsilon\left(\frac{\pi + y}{k}\right)\sin ydy\right],$$

这里算作 $k\varepsilon < \pi/2$. 因为 k 已固定,此不等式当 $\varepsilon > 0$ 足够小时是可以成立的. 由 $\Phi_\varepsilon(y)$ 的单减性知道上式右边第二个括号内为负,因此只要证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_\varepsilon\left(\frac{\pi+y}{k}\right)\sin y dy < \int_{k\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \Phi_\varepsilon\left(\frac{y}{k}\right)\sin y dy, \tag{31}$$

便可得到(30)式了。

今在引理 5 的(17)式中取

$a=0, b=\frac{\pi}{2},\ g(y)=\sin y,\ f(y)=\Phi_\varepsilon\left(\frac{y+\pi}{k}\right)$，从而 $c=1$，

便得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_\varepsilon\left(\frac{y+\pi}{k}\right)\sin y dy \leqslant \int_0^1 \Phi_\varepsilon\left(\frac{y+\pi}{k}\right)dy. \tag{32}$$

若改令 $f(y)=\Phi_\varepsilon\left(\frac{y}{k}\right)$，$a=k\varepsilon$，则 $c=\cos k\varepsilon$，且有

$$\int_{k\varepsilon}^{\pi/2} \Phi_\varepsilon\left(\frac{y}{k}\right)\sin y dy \geqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\cos k\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \Phi_\varepsilon\left(\frac{y}{k}\right)dy. \tag{33}$$

此外还有恒等式

$$\int_0^1 \Phi_\varepsilon\left(\frac{y+\pi}{k}\right)dy = k\int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi+1}{k}} \Phi_\varepsilon(y)dy, \tag{34}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\cos k\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \Phi_\varepsilon\left(\frac{y}{k}\right)dy = k\int_{\frac{\pi}{2k}-\frac{1}{k}\cos k\varepsilon}^{\pi/2k} \Phi_\varepsilon(y)dy. \tag{35}$$

今由(26)及(13)，(13)′知

$$\Phi_\varepsilon(y)=\frac{d}{dy}\cos^{-1}(1-\cos\varepsilon+\cos y),$$

应用展开式

$$\cos^{-1}(1-\cos\varepsilon+\cos y)=y-\frac{\varepsilon^2}{2}\csc y+o(\varepsilon^3)$$

及积分学基本定理即得

$$\int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi+1}{k}} \Phi_\varepsilon(y)dy=\left[y-\frac{\varepsilon^2}{2}\csc y+o(\varepsilon^3)\right]_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi+1}{k}}$$

$$=\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\csc\frac{\pi+1}{k}-\csc\frac{\pi}{k}\right)+o(\varepsilon^3)$$

及

$$\int_{\frac{\pi}{2k}-\frac{1}{k}\cos k\varepsilon}^{\frac{\pi}{2k}} \Phi_\varepsilon(y)dy = \frac{1}{k}\cos k\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}\Big[\csc\frac{\pi}{2k} - \csc\Big(\frac{\pi}{2k}-\frac{1}{k}\csc k\varepsilon\Big)\Big] + o(\varepsilon^3)$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{\varepsilon^2}{2}\Big[k + \csc\frac{\pi}{2k} - \csc\Big(\frac{\pi}{2k}-\frac{1}{k}\Big)\Big] + o(\varepsilon^3).$$

最后,将以上两式相减,并应用不等式(18),即得

$$\int_{\frac{\pi}{2k}-\frac{1}{k}\cos k\varepsilon}^{\pi/2k} \Phi_\varepsilon(y)dy - \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi+1}{k}} \Phi_\varepsilon(y)dy$$

$$= -\frac{\varepsilon^2}{2}\Big[k + \csc\frac{\pi}{2k} - \csc\Big(\frac{\pi}{2k}-\frac{1}{k}\Big) - \csc\frac{\pi+1}{k} + \csc\frac{\pi}{k}\Big] + o(\varepsilon^3) > 0.$$

现在,注意(34)及(35),即得

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\cos k\varepsilon}^{\pi/2} \Phi_\varepsilon\Big(\frac{y}{k}\Big)dy > \int_0^1 \Phi_\varepsilon\Big(\frac{y+\pi}{k}\Big)dy,$$

与(32),(33)联立,即知(31)式成立,从而(30)式成立,引理证毕.

下面证明本节的第二个主要定理.

定理 2. 方程(11)当 $0<|\mu|\ll 1$ 时在环面上至少有 $2(k-1)$个第一类极限环,其中 $k-1$ 个环包围奇点 O,另外 $k-1$ 个环包围奇点 O_3.

证. 记$\left[\frac{ka}{\pi}\right]=m$,由引理 3,

$$J(a) = \int_0^a g_a(y)\sin ky\,dy$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1}\int_{j\pi/k}^{(j+1)\pi/k} g_a(y)\sin ky\,dy$$

$$+\int_{\frac{m}{k}\pi}^{a} g_a(y)\sin ky dy$$

$$=\sum_{j=0}^{m-1} J_j(a)+\int_{m\pi/k}^{a} g_a(y)\sin ky dy,$$

其中

$$J_j(a)=\int_{j\pi/k}^{(j+1)\pi/k} g_a(y)\sin ky dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{k}} g_a\left(y+\frac{j\pi}{k}\right)\sin(ky+j\pi)dy$$

$$=(-1)^j\int_0^{\frac{\pi}{k}} g_a\left(y+\frac{j\pi}{k}\right)\sin ky dy \quad (j=0,1,\cdots,m-1).$$

由引理 2 知

$$0<J_0(a)<-J_1(a)<J_2(a)<-J_3(a)<\cdots$$
$$(0<a<\pi).$$

因此得到:

$$J\left(\frac{\pi}{k}\right)=J_0\left(\frac{\pi}{k}\right)>0,$$

$$J\left(\frac{2\pi}{k}\right)=J_0\left(\frac{2\pi}{k}\right)+J_1\left(\frac{2\pi}{k}\right)<0,$$

$$J\left(\frac{3\pi}{k}\right)=J_0\left(\frac{3\pi}{k}\right)+J_1\left(\frac{3\pi}{k}\right)+J_2\left(\frac{3\pi}{k}\right)>0,$$

$$\cdots$$

$$J\left(\frac{k-1}{k}\pi\right)\begin{cases}<0, & \text{当 } k \text{ 为奇数时},\\ >0, & \text{当 } k \text{ 为偶数时},\end{cases}$$

$$J\left(\frac{k}{k}\pi\right)=J(\pi)\begin{cases}>0 & \text{当 } k \text{ 为奇数时},\\ =0, & \text{当 } k \text{ 为偶数时},\end{cases}$$

$$J(\pi-\varepsilon)<0, \text{当 } k \text{ 为偶数时}, 0<\varepsilon\ll 1.$$

由以上不等式立刻得到定理的证明.

刘世泽等人通过数值计算表明：当 $\mu>0$ 不断增大时，方程

(11)的包围O的第一类极限环逐个地扩大，与鞍点相遇成为奇闭轨，然后消失。同时又出现新的第二类极限环。当第一类极限环的个数不断减少时，第二类极限环的个数不断增多。但是即使对于方程(1)(它相当于$k=3$时的方程(11))，如果$\mu>0$增加，使得O外围的大环Γ_2扩大，成为分界线环，然后破裂，我们将得到如图12.5的相图。由此仍不易看出在(用虚线所示的)Γ^*的外部

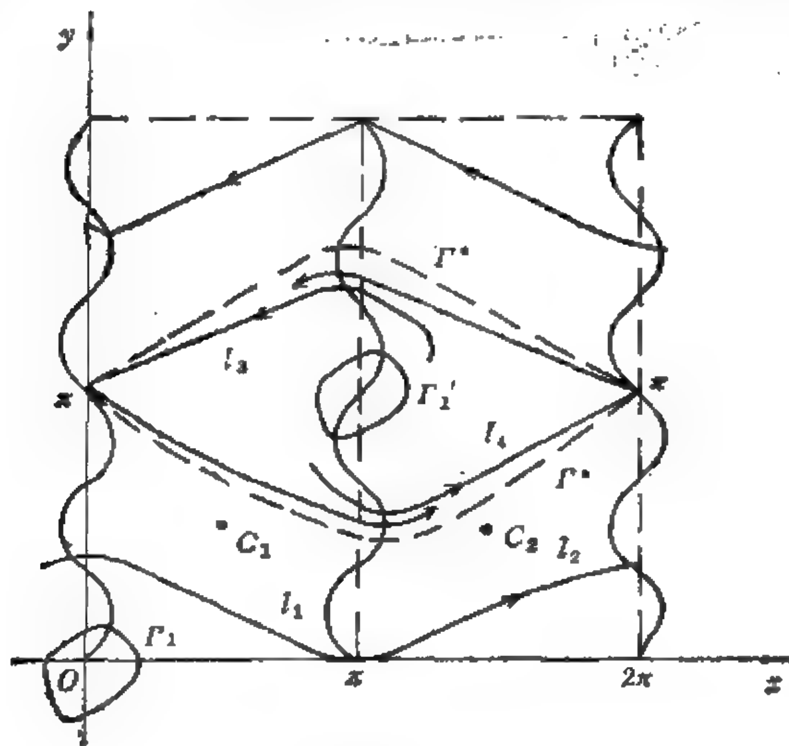


图 12.5

是否存在第二类闭轨。看来现在想用§11第II段用过的压缩映象原理来证明在Γ^*下方而位于分界线l_1,l_2上方的带域(在T^2上则为环域)中是否存在第二类闭轨，还有困难。注意：如果应用§10定理10的不等式(12)，则只能肯定图12.5中至少存在两条不同伦于零的奇闭轨。例如，其中之一是由广义焦点Γ_1，鞍点$(0,\pi)-(2\pi,\pi)$，以及连接它们的两条分界线l_3，l_4构成的。另一条与此类似，但由广义焦点Γ_1，鞍点$(\pi,0)-(\pi,2\pi)$，以及连接它们的两条分界线构成。虽然如此，在图12.5中究竟是否存在第二类闭轨的问题是值得研究的。(当然，这种第二类闭轨如果存在，有可能绕环面多于一周。)

参考文献

[1] S. Lefschetz, Introduction to Topology, Princeton Univ. Press, 1949.

[2] 江泽涵，拓扑学引论，上海科技出版社，1978.

[3] C. Godbillon, Dynamical Systems on Surfaces, Springer-Verlag, 1983.

[4] M. W. Hirsch, Differential Topology, Springer-Verlag, 1976.

[5] F. H. Croom, Basic Concepts of Algebraic Topology, Springer-Verlag, 1978.

[6] A. Gramain, Topologie des Surfaces, Presses Univ. de France, 1971 (中译本：A. 格拉曼，曲面拓扑学，科学出版社，1981).

[7] I. Richards, On the classification of noncompact Surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106(1963), 259—269.

[8] M. C. Irwin, Smooth Dynamical Systems, Acad. Press, 1980.

[9] J. Dieudonné, Treatise on Analysis, II, III, Acad. Press, 1972.

[10] В.В. Немыцкий, В.В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, Москва 1949 (中译本：B. B. 涅梅茨基，B. B. 斯捷巴诺夫，微分方程定性论，上、下册，科学出版社，1959).

[11] 张筑生，微分动力系统原理，科学出版社，1987.

[12] I. Kupka, On two notions of structural stability, *J. Differential Geometry*, 9(1974), 639—644.

[13] P. Hartman, Ordinary Differential Equations, Wiley, New York, 1964.

[14] E. J. Akutowicz, The ergodic property of the characteristics on a torus., *Quart. J. Math.*, 9(1958), 275—281.

[15] J. K. Hale, Ordinary Differential Equations, Wiley-Interscience, New York, 1969(中译本：J. K. 海尔，常微分方程，人民教育出版社，1980).

[16] E. A. Coddington, N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations., McGraw-Hill, New York, 1955.

[17] Han Maoan, The rotation numbers and direction of a continuou flow on the torus. *Chin. Ann. of Math.*, 9B(2), 1988, 207—215.

[18] N. G. Markley, Homeomorphisms of the circle without periodic points, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 20(1970), 688—698.

[19] С. Х. Арансон, Е. В. Жужов, О топологической классификации сингулярных динамических систем на торе, *Изв. высш. учеб. заведений, Матем.*, 5(1976). 104—107.

[20] J. Palis, Jr. W. de Melo, Geometric Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1982(中译本：J. 帕利斯，W. 德梅罗，动力系统几何理论引论，科学出版社，1988).

[21] L. M. Graves, The Theory of Functions of Real Variables, Univ. of Chicago Press, 1946.

[22] M. Herman, Sur la conjugaison differentiable des difféomorphismes

du cercle à des rotations., *Publ. Math. I. H. E. S.*, **49**(1979), 5—233.

[23] T. Saito, On the measure preserving flow on the torus, *J. Math. Soc. Japan*, **3**(1951), 279—284.

[24] А. Н. Колмогоров, *Докл. Акад. Наук, СССР*, **93**(1953), 763—766.

[25] S. Sternberg, On differential equations on the torus, *Amer. J.Math.*, **79**(1957), 397—402.

[26] Н. И. Гаврилов, О динамических системах с инвариантной мерой лебега на поверхности тора, *Диф. урав.*, **12**(2), 1976, 206—212.

[27] Yu Shuxiang, On dynamical systems with an integral in variant on the torus, *J. Diff Equs.*, **53**(2), 1984, 277—287.

[28] Zhu Deming, Dynamical system with integral invariant on 2-manifold, *Ann. Diff. Equs.*, **2**(2), 1986, 241—253.

[29] N. G. Markley, The Poincaré-Bendixson theorem for the Klein bottle, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **135**(1969), 159—165.

[30] H. Kneser, Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen,*Math. Ann.*, **91**(1924), 135—154.

[31] C. Gutierrez,Structural stability for flows on the torus with a crosscap, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **241**(1978), 311—320.

[32] Dhu Deminy, The improvement of the Kneser theorem and its applications, *Chin. Ann. Math.*, **8B**(3), 1987, 364—374.

[33] M. M. Peixoto, Structural stability on two-dimensional manifolds, *Topology*, **1**(1952), 101—120.

[34] 陈一元,射影平面上微分方程的定性理论,数学年刊,2(1),1981,101—116.

[35] 陈一元,射影平面上微分方程的定性理论 (II), 数学年刊, **4A**(1983), 755—762.

[36] Chen Yiyuan, Qualitative theory of differential equations on the projective plane, Proc. 1983 Beijing Symp. Diff. Geom. and Diff. Equs., Science Press, 1986, 421—422.

[37] Zhu Deminy, The topological and dynamical properties of nonorientable surfaces, *Chin. Ann. Math.*, **9B**(2), 1988, 197—206.

[38] 叶彦谦等,极限环论,上海科技出版社,1984.

[39] M. I. T. Camacho, Geometric properties of homogeneous vector fields of degree two in R^3, *Trans. Amer. Math. Soc.*,**268**(1981), 79—101.

[40] 吴葵光, R^3 中二次齐次向量场的一些性质与分类问题, 科学院数学所研究年报,1987,32—36.

[41] 梁肇军,射影平面上二次微分系统的仿射分类(尚未发表).

[42] D. A. Neumann, Central sequences in dynamisal. systems, *Amer. J. Math.*, **100**(1), 1978, 1—18.

[43] А. Майер, О траекториях на ориентируемых поверхностях, *Мат. сбор.*, **12**(1943), 71—84.

[44] N. G. Markley, On the number of recurrent orbit closures, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **25**(1970), 413—416.

[45] E. L. Lima, Common singularities of commuting vector fields on 2-manifolds, *Comment. Math. Helv.*, **39**(1964), 97 —110.

[46] A. J. Schwartz, E. S. Thomas, The depth of the center of 2-manifolds, Proc. Symp. pureMath., **14**, 253—264, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970.
[47] 董镇喜,二维定向流形上动力系统的一些拓扑结构,北京大学学报,**2**(1982), 23—29.
[48] L. Zippin, On continuous curves and the Jordan curve theorem, *Amer. J. Math.*, **52**(1930), 331—350.
[49] D. A. Neumann, Central sequences in flows on 2-manifolds of finite genus, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **61**(1976), 39—43.
[50] 余澍祥,二维流形上连续流的一个全局性质,数学学报,**24**(2),1981,207—210.
[51] 董镇喜,关于极限轨道系统,数学学报,**25**(1982),595—602.
[52] W. Kaplan, Regular families filling the plane, *Duke Math. J.*, **7**(1940), 154—185; **8**(1941), 11—46.
[53] A. Haefliger, G. Reeb, Variétés(nonséparées) à une dimension et structures feuilletées du plan, *l'Enseignement Mathématique*, **3**(1957), 107—125.
[54] L. Markus, Global structure of ordinary differential equations in the plane, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76**(1954), 127—148.
[55] A. A. Андронов, E. A. Леонтович, И. И. Гордон, A. T. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка, Москва, 1966.
[56] M. M. Peixoto, On the classification of flows on 2-manifolds, Dynamical Systems(Salvador 1971), 389—419, Academic Press, New York, 1973.
[57] D. A. Neumann, Classification of continuous flows on 2-manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **48**(1975), 73—81.
[58] D. A. Neumann, T. O'brien, Global structure of continuous flows on 2-manifolds, *J. Diff. Equs.*, **22**(1976), 89—110.
[59] D. A. Neumann, Completely unstable flows on 2-manifolds, *Trans. Amer. Math.Soc.*, **225**(1977), 211—226.
[60] Dong Zhenxi, On the classification of dynamical systems for orientable 2-manifolds, Proc. 1983 Beijing Symp. Diff. Geom. and Diff. Equs., Science Press, 1986, 441—442.
[61] S. Lefschetz, Differential Equations, Geometric Theory, Wiley-Interscience, New York, 1957.
[62] C. X. Арансон, B. З. Гринес, О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях(необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивный систем, *Мат. сбор.*, **90**(1973), 372—402.
[63] C. X. Арамсон, B. З. Гринес, О топологической эквивалентности минимальных множеств динамических систем двумерных многообразиях, *Успехи Мат. Наук*, **28**(4), 1973, 205—206.
[64] C. X. Арансон, О некоторых Арифметических свойствах динамиче-

ских систем на двумерных многообразиях, *Докл. Акад. Наук. СССР*, **222**(1975), 265—268.

[65] С. Х. Арансон, Траектории на неориентируемых двумерных многообразиях, *Мат. сбор.*, **80**(1969), 314—333.

[66] 陈藻平, 环面上具有一个奇点的微分方程的轨线的拓扑结构, 数学学报, **24**(1981),154—160.

[67] 叶彦谦、马知恩,环域定理与奇点概念的推广,南京大学学报,1977, no. 1, 7—29.

[68] R. J. Sacker, G. R. Sell, On the existence of periodic solutions on 2-manifolds, *J. Diff. Equs.*, **11**(3), 1972, 449—463.

[69] 余澍祥,二维流形上周期解的存在性,数学学报,**23**(5),1980,712—719.

[70] 董镇喜, 关于二维定向流形上动力系统的周期解的存在问题, 北京大学学报, 1982, 55—61.

[71] 董镇喜,二维流形上动力系统周期解的存在性,数学学报, **27**(5), 1984, 644—647.

[72] 朱德明,二维流形上非零伦周期轨道的存在性,数学学报, **30**(3), 1987, 706—712.

[73] Han Maoan, Existence of closed or singular closed orbits of continuous flows on surfaces, 南京大学学报数学半年刊, **5**(1988),198—202.

[74] Zhu Deming, Existence of periodic and singular closed orbits on 2-Manifold, *Ann. Diff. Equs.*, **1**(2), 1985, 231—248.

[75] Han Maoan, Periodic orbits and P stable orbit closure of continuous flows on surfaces, *Chin. Ann. Math.*, **9B**(1988),274—282.

[76] 伍鸿熙等,紧黎曼曲面引论,科学出版社,1981.

[77] 秦元勋,环面上的微分方程 (1), 数学学报, **8**(3),1958,348—368.

[78] 叶彦谦、罗定军,环面上含奇点的微分方程的定性研究,数学年刊, **1**(1980),335—349.

[79] 罗定军, 环面三角多项式系统的拓扑结构与分枝问题, 南京大学学报数学半年刊,**2**(1),1985,16—31.

[80] В. С. Булдырев, А. И. Ланин, Зап. науч. семинаров ЛОМИ(1981), **104**, 49—65.

[81] 滕利邦, 环面上具两个非初等奇点的微分方程的定性研究, 南京大学学报数学专刊,1983,59—70.

[82] 王现、王明淑,环面上一类含奇点的微分方程的定性分析,南京大学学报数学专刊,1983,39—58.

[83] 田景黄,环面上 Van der Pol 方程的研究,南京大学学报, (3),1982,607—616.

[84] Liu Shize, Tian Jinghuang, On toral van der Pol equations, Proc. 1983 Beijing Symp. Diff. Geom. and Diff. Equs., Scientific Press, 1986, 489—490.

[85] 田景黄、高隆昌,环面微分系统$\frac{dx}{dt}=\sin y$, $\frac{dy}{dt}=-\sin x+\mu\sin 2y$的定性研究,四川大学学报,(2),1982,10—16.

[86] E. F. Beckenback, R. Bellman, Inequalities, Springer-Verlag, 1961.

[87] 章熙康,一个射影平面上的三角多项式系统的定性分析(尚未发表).

[88] 周荣星，环面[illegible] $y) - \sin x] - \Delta\omega$, $\dot{y} = \alpha_2[\sin(y - x) - \sin y] - \Delta\omega$ [illegible]动结[illegible]析 [illegible] 应用数学和力学，9(11)，1988，1003—1013。

[89] Ye Yanqian, Relative position of the critical points of a cubic system and a generalization of the Bendixson formula(to appear in *Ann. of Diff. Equs.*, 1990).

[90] H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, Oeuvres, vol. 1, Paris, 1892.

[91] Ye Yanqian, Divergence and uniqueness of limit cycles of a quadratic differential system, *Ann. of Diff. Equs.*, 6(1), 1990, 117—122.

[92] Ye Yanqian, Rotated vector fields decomposition method and its applications(to appear).

[93] Ye Weiyin, Ye Yanqian, Triangulation and fundamental elements of a planar dynamical system defined by quadratic differential equations (to appear).

[94] 梁肇军，R^3 中二次齐次向量场的周期轨道问题(预印本)。